

Исчисление Ламбека

проф. Мати Рейнович Пентус, каф. математической логики и теории алгоритмов

<http://lpcs.math.msu.su/~pentus/problems.htm>

Алфавитом называется непустое конечное множество. Словом в алфавите называется конечная последовательность элементов, взятых из этого алфавита (пустая последовательность тоже считается словом). Языком над алфавитом называется любое множество слов в этом алфавите.

Если C и D — языки, то через C / D обозначается ещё один язык. Он содержит слово w тогда и только тогда, когда при приклеивании к слову w справа любого слова из языка D получается слово из языка C . Например, $\{abba, baa, bacb\} / \{a, cb\} = \{ba\}$ и $\{abbbab, abab, aab\} / \{ab, bab\} = \{a, ab\}$.

Аналогично, через $C \setminus D$ обозначается язык, содержащий слово w тогда и только тогда, когда при приклеивании к слову w слева любого слова из языка C получается слово из языка D .

Задача 1. Существует ли над двухбуквенным алфавитом такой язык E , что

- а) $E / E \neq E \setminus E$?
- б) $(E / E) \setminus E \neq E$?
- в) $E / (E / E) \neq E$?
- г) $E \setminus (E / E) \neq (E \setminus E) / E$?
- д) $E / ((E / E) \setminus E) \neq E / E$?
- е) $(E / E) / (E / E) \neq E / E$?
- ж) $(E / E) \setminus (E / E) \neq E / E$?
- з) $E \setminus ((E / E) / E) \neq (E \setminus (E \setminus E)) / E$?
- и) $((E \setminus E) \setminus E) \setminus E \neq E \setminus ((E \setminus E) \setminus E)$?

Задача 2. Существует ли быстрый алгоритм, правильно отвечающий на все вопросы, подобные перечисленным в предыдущей задаче?

Задача 3. Существуют ли над двухбуквенным алфавитом такие язык E и G , что

- а) $(G / E) \setminus G \neq E$?
- б) $G \setminus (E / E) \neq (G \setminus E) / E$?
- в) $G \setminus (E / G) \neq (G \setminus E) / G$?
- г) $G \setminus (E / E) \neq (E \setminus E) / G$?
- д) $E / ((E / G) \setminus E) \neq E / G$?

Задача 4. Существует ли быстрый алгоритм, правильно отвечающий на все вопросы, подобные перечисленным в предыдущей задаче?

Через $C \cdot D$ обозначается язык, содержащий в точности слова, полученные приклеиванием к слову из языка C справа слова из языка D .

Задача 5. Для всех ли языков E , G и H верно

- а) $E \cdot (G / H) \subseteq (E \cdot G) / H$?
- б) $(E \cdot G) / H \subseteq E \cdot (G / H)$?
- в) $H \setminus E \subseteq (H \setminus G) / (E \setminus G)$?

Теорема. Все универсальные законы, составленные из $\cdot$, $/$, $\setminus$, $\subseteq$, можно вывести (без привлечения определений операций $\cdot$, $/$, $\setminus$) из аксиом $L \subseteq L$, $(K \cdot L) \cdot M \subseteq K \cdot (L \cdot M)$, $K \cdot (L \cdot M) \subseteq (K \cdot L) \cdot M$, $1 \cdot L \subseteq L$, $L \cdot 1 \subseteq L$, $L \subseteq 1 \cdot L$, $L \subseteq L \cdot 1$ с помощью подстановки и следующих правил:

$K \cdot L \subseteq M$ тогда и только тогда, когда $K \subseteq M / L$;

$K \cdot L \subseteq M$ тогда и только тогда, когда $L \subseteq K \setminus M$;

если $K \subseteq L$ и $L \subseteq M$, то $K \subseteq M$.

(Эта система аксиом и правил называется *исчислением Ламбека с единицей*.)