

Семантика Монтегю и синтаксическое исчисление Ламбека

Черновик

М. Р. Пентус

1 Введение в семантику Монтегю

Справка 1.1. Р. Монтегю (Richard Montague) (1930–1971) — американский математик и логик.

Справка 1.2. Б. Парти (Barbara Partee) (р. 1940) — американский лингвист.

Справка 1.3. Г. Фреге (Gottlob Frege) (1848–1925) — немецкий математик и логик.

Справка 1.4. Н. Хомский (Noam Chomsky) (р. 1928) — американский лингвист.

Формальная семантика естественного языка выявляет логические связи между его предложениями.

Пример 1.5. В категориальной грамматике значением выражения *the box on the table* является терм $\text{THE}(\text{ON}(\text{THE}(\text{TABLE}))(\text{BOX}))$. Выражение *the pyramid near the box on the table* имеет два значения: $\text{THE}(\text{NEAR}(\text{THE}(\text{ON}(\text{THE}(\text{TABLE}))(\text{BOX}))(\text{PYR}))$ и $\text{THE}(\text{ON}(\text{THE}(\text{TABLE}))(\text{NEAR}(\text{THE}(\text{BOX}))(\text{PYR})))$

Пример 1.6. Другие примеры многозначных предложений: *John puts the block in the box on the table*, *John sees the astronomer with the telescope*.

Существует бесконечно много грамматически корректных предложений. Множество смыслов этих предложений также бесконечно.

Принцип композиционности (the principle of compositionality) (восходит к Готлобу Фреге): значение целого определяется значениями его составных частей и способом их комбинации.

Категориальная грамматика (categorial grammar) берёт начало в работах Ричарда Монтегю. В этом направлении работают Глин Моррилл, Барбара Парти и др.

Традиция различать смысл (sense) и значение (meaning) выражения языка восходит к Готлобу Фреге. Для математической формализации этого различия используется интенциональная логика (intensional logic).

2 Лямбда-исчисление

[7, Ch. 2]

Справка 2.1. А. Чёрч (Alonzo Church) (1903–1995) — американский логик и математик.

2.1 Простая теория типов

[7, 2.1]

Определение 2.2. Множество *простейших типов* (basic types) **BasTyp** — произвольное непустое множество.

Определение 2.3. Множество *типов* (types) определяется индуктивно.

1. **BasTyp** $\subseteq$ **Typ**.

2. Если $\sigma \in \text{Typ}$ и $\tau \in \text{Typ}$, то $(\sigma \rightarrow \tau) \in \text{Typ}$.

Замечание 2.4. На интуитивном уровне каждому типу соответствует некоторое множество. Если типу σ соответствует множество S и типу τ соответствует множество T , то типу $(\sigma \rightarrow \tau)$ соответствует множество всех функций из S в T .

Пример 2.5. Пусть **BasTyp** = {**Real**, **Bool**}. В подразумеваемой модели типу **Real** соответствует множество всех действительных чисел (обозначаемое, как обычно, $\mathbb{R}$), а типу **Bool** — множество истинностных значений, состоящее из двух элементов — лжи и истины. Для краткости будем их обозначать соответственно 0 и 1.

Пример 2.6. Если $\mathbf{Real} \in \mathbf{BasTyp}$, то $(\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}) \in \mathbf{Typ}$. При этом типу $(\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real})$ соответствует множество всех функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

Пример 2.7. Если $\mathbf{Bool} \in \mathbf{BasTyp}$, то $(\mathbf{Bool} \rightarrow \mathbf{Bool}) \in \mathbf{Typ}$. Типу $(\mathbf{Bool} \rightarrow \mathbf{Bool})$ соответствует множество, содержащее четыре функции, которые можно схематически изобразить так:

$$\begin{bmatrix} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 0, \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1, \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0, \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 1. \end{bmatrix}$$

Пример 2.8. Если $\{\mathbf{Real}, \mathbf{Bool}\} \subseteq \mathbf{BasTyp}$, то $(\mathbf{Real} \rightarrow (\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Bool})) \in \mathbf{Typ}$. Этому типу соответствует множество двуместных предикатов на множестве $\mathbb{R}$.

Пример 2.9. Если $\mathbf{Real} \in \mathbf{BasTyp}$, то $((\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}) \rightarrow (\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real})) \in \mathbf{Typ}$. Этому типу соответствует множество преобразований на множестве одноместных действительных функций.

Замечание 2.10. Для удобства вводятся договорённости об опускании скобок при записи типов. Во-первых, самые внешние скобки можно опускать. Например, $\mathbf{Real} \rightarrow (\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Bool})$ и $(\mathbf{Real} \rightarrow (\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Bool}))$ обозначают один и тот же тип. Во-вторых, если рядом находятся две операции $\rightarrow$ и из-за отсутствия скобок неясно, какая из них внутренняя, а какая — внешняя, то внутренней считается та, которая находится правее. Другими словами, операция $\rightarrow$ считается *право-ассоциативной* (right-associative). Например, $\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Bool}$ и $\mathbf{Real} \rightarrow (\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Bool})$ обозначают один и тот же тип. Однако в записи $(\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}) \rightarrow \mathbf{Bool}$ ни одной скобки опускать нельзя.

Замечание 2.11. Во всех логических и лингвистических примерах присутствует тип истинностных значений, обычно обозначаемый $\mathbf{Bool}$. При этом $\mathbf{Bool} \in \mathbf{BasTyp}$.

Упражнение 2.12. Сколько элементов содержит множество, соответствующее типу $((\mathbf{Bool} \rightarrow \mathbf{Bool}) \rightarrow \mathbf{Bool}) \rightarrow \mathbf{Bool}$?

2.2 Термы

[7, 2.2]

В примерах этого раздела используются простейшие типы из примера 2.5.

Определение 2.13. Для каждого $\tau \in \mathbf{Typ}$ имеется счётное множество *переменных* (variables) $\mathbf{Var}_\tau$ и произвольное множество *констант* (constants) $\mathbf{Con}_\tau$. Введём следующие обозначения для множества всех переменных и множества всех констант: $\mathbf{Var} = \bigcup_{\tau \in \mathbf{Typ}} \mathbf{Var}_\tau$, $\mathbf{Con} = \bigcup_{\tau \in \mathbf{Typ}} \mathbf{Con}_\tau$.

Замечание 2.14. На интуитивном уровне константы из $\mathbf{Con}_\tau$ обозначают конкретные элементы множества, соответствующего типу τ . Аналогично, значениями переменных из $\mathbf{Var}_\tau$ могут быть только элементы множества, соответствующего типу τ .

Определение 2.15. Множество *лямбда-термов* (lambda-terms) типа τ (обозначение $\mathbf{Term}_\tau$) определяется индуктивно.

1. $\mathbf{Var}_\tau \subseteq \mathbf{Term}_\tau$.
2. $\mathbf{Con}_\tau \subseteq \mathbf{Term}_\tau$.
3. Если $\alpha \in \mathbf{Term}_{\sigma \rightarrow \tau}$ и $\beta \in \mathbf{Term}_\sigma$, то $\alpha(\beta) \in \mathbf{Term}_\tau$.
4. Если $x \in \mathbf{Var}_\sigma$ и $\alpha \in \mathbf{Term}_\tau$, то $\lambda x.(\alpha) \in \mathbf{Term}_{\sigma \rightarrow \tau}$.

Замечание 2.16. Часто для краткости лямбда-термы называют *λ -термами* или просто *термами*. Способы образования сложных термов имеют следующие названия: $\alpha(\beta)$ называется *аппликацией* (application), $\lambda x.(\alpha)$ называется *лямбда-абстракцией* (lambda-abstraction) или просто *абстракцией*.

Замечание 2.17. На интуитивном уровне каждый терм типа τ обозначает некоторый элемент множества, соответствующего типу τ . Какой именно элемент данный терм обозначает, может зависеть от значений некоторых переменных, встречающихся в этом терме.

Если терм α обозначает функцию f , а терм β обозначает элемент b , то терм $\alpha(\beta)$ обозначает результат применения функции f к элементу b .

Пример 2.18. Пусть $0 \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Real}}$ и $\cos \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}}$ (подразумеваемые значения ясны из обозначений). Тогда $\cos(0) \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real}}$. Как известно из школьной математики, значением этого терма является число один.

Константы и переменные из следующего примера будут использоваться во многих дальнейших примерах.

Пример 2.19. Пусть $-1, 0, 1$ и 2 принадлежат множеству $\mathbf{Con}_{\mathbf{Real}}$. Пусть $\sin, \cos$ и $\exp$ принадлежат множеству $\mathbf{Con}_{\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}}$. Подразумеваемые значения $\sin$ и $\cos$ ясны из обозначений, $\exp$ обозначает функцию $x \mapsto e^x$. Пусть $\text{MINUS} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}}$ и значением $\text{MINUS}(\alpha)(\beta)$ является разность значений термов α и β . Другими словами, MINUS обозначает функцию, ставящую в соответствие каждому числу $a \in \mathbb{R}$ функцию $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, определённую формулой $f_a(b) = a - b$. Пусть $\text{PLUS}, \text{TIMES} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}}$, значением $\text{PLUS}(\alpha)(\beta)$ является сумма значений термов α и β , а значением $\text{TIMES}(\alpha)(\beta)$ — их произведение. Пусть $x, y, z \in \mathbf{Var}_{\mathbf{Real}}$ и $f, g \in \mathbf{Var}_{\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}}$. Тогда $\text{MINUS}(x)(\text{TIMES}(f(\cos(y)))(g(\sin(z))))$ является термом типа $\mathbf{Real}$, а значением этого термина является число, вычисляемое по формуле $x - f(\cos(y)) \cdot g(\sin(z))$.

Пусть, кроме того, $\text{LESS}, \text{EQ} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Bool}}$, $\text{NOT} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Bool} \rightarrow \mathbf{Bool}}$, $\text{AND}, \text{OR} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Bool} \rightarrow \mathbf{Bool} \rightarrow \mathbf{Bool}}$. Подразумеваемое значение $\text{LESS}(\alpha)(\beta)$ истинно тогда и только тогда, когда значение термина α меньше значения термина β . Значения остальных названных констант определяются аналогично, при этом EQ обозначает отношение равенства на множестве действительных чисел. Тогда $\text{AND}(\text{LESS}(-1)(1))(\text{NOT}(\text{EQ}(0)(2)))$ является термом типа $\mathbf{Bool}$, а значением этого термина является истина.

Замечание 2.20. Как видно из предыдущего примера, значения констант из $\mathbf{Con}_{\sigma \rightarrow \tau}$ не обязаны быть постоянными функциями.

Замечание 2.21. Если $x \in \mathbf{Var}_{\sigma}$, α — терм типа τ , содержащий переменную x , и типу σ соответствует множество S , то терм $\lambda x.(\alpha)$ обозначает функцию, ставящую в соответствие каждому элементу $s \in S$ значение термина α при значении x , равным s . Аналогично задаётся значение термина $\lambda x.(\alpha)$, если α не содержит переменную x , просто в этом случае получается постоянная функция.

Пример 2.22. Согласно определению 2.15 $\lambda x.(\text{PLUS}(x)(1)) \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}}$ и $\lambda x.(2) \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}}$. Значением первого термина является функция, прибавляющая своему аргументу единицу. Значением второго термина является постоянная одноместная функция, всегда возвращающая число два.

Пример 2.23. Согласно определению 2.15 $\lambda x.(\lambda y.(\text{PLUS}(x)(\cos(y)))) \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}}$ и $\lambda x.(\text{TIMES}(\text{PLUS}(x)(y))(\text{PLUS}(x)(z))) \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}}$.

Определение 2.24. Множество всех термов определяется так: $\mathbf{Term} = \bigcup_{\tau \in \mathbf{Typ}} \mathbf{Term}_{\tau}$.

Замечание 2.25. Записи (0) $((\cos))$ $(\cos)(0)$ и $(\cos)(0)$ не являются термами. В рассматриваемом здесь формальном лямбда-исчислении скобки появляются только там, где это явно указано в определении термина.

Замечание 2.26. Для удобства записи термов договоримся, что у аппликации приоритет выше, чем у лямбда-абстракции. Таким образом, иногда можно в записи $\lambda x.(\alpha)$ скобки опускать. Например, $\lambda x.(\lambda y.(\text{DER}(\lambda z.(0))))$ и $\lambda x.\lambda y.\text{DER}(\lambda z.0)$ обозначают один и тот же терм (здесь $\text{DER} \in \mathbf{Con}_{(\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}) \rightarrow \mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}}$). Однако в записи $\lambda x.(x)(\text{PLUS}(y)(z))$ ни одной скобки опускать нельзя.

Пример 2.27. Запись $\lambda x.\cos(0)$ обозначает терм $\lambda x.(\cos(0))$, а не терм $\lambda x.(\cos)(0)$.

Упражнение 2.28. Восстановить все скобки в терме $\lambda z.\text{PLUS}(2)(z)$.

Упражнение 2.29. Восстановить все скобки в терме $\lambda x.\lambda y.\text{PLUS}(1)(2)$.

Упражнение 2.30. Восстановить все скобки в терме $\lambda x.\lambda y.(\text{PLUS})(1)(2)$.

Упражнение 2.31. Восстановить все скобки в терме $\lambda x.(\lambda y.\text{PLUS})(1)(2)$.

Упражнение 2.32. Восстановить все скобки в терме $\lambda x.\lambda y.(\lambda x.(\lambda y.R(y)(x)))(y)(x)$.

Упражнение 2.33. Восстановить все скобки в терме $\lambda Q.(Q(Q(\text{MINUS}))) (\lambda R.\lambda x.\lambda y.R(y)(x))$.

Упражнение 2.34. Записать терм $\lambda f.(f(f(f(2)))) (\lambda z.(\text{TIMES}(z)(z)))$, экономя скобки.

Пример 2.35. Значения термов $\lambda x.(\text{MINUS}(x)(y))$ и $\lambda z.(\text{MINUS}(z)(y))$ совпадают.

Упражнение 2.36. Какие из термов $\lambda x.(\lambda y.(\text{MINUS}(x)(y)))$, $\lambda x.(\lambda y.(\text{MINUS}(y)(x)))$, $\lambda y.(\lambda x.(\text{MINUS}(y)(x)))$ имеют одинаковые значения?

Пример 2.37. Пусть $\text{DER} \in \mathbf{Con}_{(\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}) \rightarrow \mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}}$. Тогда $\lambda x.(\text{DER}(\cos)(x))(2) \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real}}$, $\lambda y.(\text{DER}(\cos)(y))(2) \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real}}$, $\text{DER}(\cos)(2) \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real}}$, $\text{DER}(\lambda z.(\cos(z)))(2) \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real}}$. В разделе 2.4 будет построено исчисление, в котором выводится эквивалентность приведённых четырёх термов (они равны независимо от того, каковы значения констант $0, 2, \cos, \text{DER}$).

Определение 2.38. Вхождение (occurrence) переменной x в терм α называется *свободным* (free), если оно не входит в область действия никакого квантора по переменной x в терме α . Вхождение переменной x в терм α называется *связанным* (bound), если оно не является свободным.

Определение 2.39. Переменная x называется *свободной переменной* (free variable) терма α , если α содержит хотя бы одно свободное вхождение переменной x .

Дадим другое, более формальное определение свободной переменной (без привлечения понятий “вхождение” и “область действия”, которых мы не определяли).

Определение 2.40. Множество свободных переменных терма α (обозначение $\mathbf{Free}(\alpha)$) определяется индуктивно.

1. Если $x \in \mathbf{Var}$, то $\mathbf{Free}(x) = \{x\}$.
2. Если $c \in \mathbf{Con}$, то $\mathbf{Free}(c) = \emptyset$.
3. $\mathbf{Free}(\alpha(\beta)) = \mathbf{Free}(\alpha) \cup \mathbf{Free}(\beta)$.
4. $\mathbf{Free}(\lambda x.(\alpha)) = \mathbf{Free}(\alpha) - \{x\}$.

Пример 2.41. Согласно определению 2.40 $\mathbf{Free}(\cos(y)) = \{y\}$, $\mathbf{Free}(\text{PLUS}(x)(\cos(y))) = \{x, y\}$, $\mathbf{Free}(\lambda y.(\text{PLUS}(x)(\cos(y)))) = \{x\}$, $\mathbf{Free}(\lambda x.(\lambda y.(\text{PLUS}(x)(\cos(y)))) = \emptyset$.

Пример 2.42. Согласно определению 2.40 $\mathbf{Free}(\lambda x.(\text{TIMES}(\text{PLUS}(x)(y))(\text{PLUS}(x)(z)))) = \{y, z\}$.

Пример 2.43. Согласно определению 2.40 $\mathbf{Free}(\lambda x.(2)(\cos(y))) = \{y\}$. Значением этого терма является число два.

Упражнение 2.44. Пусть $P \in \mathbf{Var}_{(\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}) \rightarrow \mathbf{Real}}$ и $\alpha = \text{PLUS}(\text{TIMES}(x)(P(\lambda x.(\cos(x)))))(x)$. Найти $\mathbf{Free}(\alpha)$ и тип терма α .

Определение 2.45. Терм α называется *замкнутым* (closed), если $\mathbf{Free}(\alpha) = \emptyset$, то есть α не содержит свободных переменных.

Пример 2.46. Терм $\lambda x.(\text{TIMES}(\text{PLUS}(x)(-1))(\text{PLUS}(x)(2)))$ является замкнутым, а терм $\lambda x.(\text{TIMES}(\text{PLUS}(x)(y))(\text{PLUS}(x)(z)))$ не является замкнутым. Значением первого терма является одноместная функция $x \mapsto (x-1)(x+2)$. Значением второго терма также является одноместная функция, но не зная значений переменных y и z , невозможно указать, какая именно.

Пример 2.47. Введём константу $\mathbf{DER} \in \mathbf{Con}_{(\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}) \rightarrow \mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}}$. Для любых $\varphi \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real} \rightarrow \mathbf{Real}}$ и $\alpha \in \mathbf{Term}_{\mathbf{Real}}$ значением терма $\mathbf{DER}(\varphi)(\alpha)$ будем считать производную функции, обозначаемой термом φ , в точке, равной значению терма α . Если эта функция в данной точке недифференцируема, то значением терма $\mathbf{DER}(\varphi)(\alpha)$ будем считать число ноль. Тогда значения термов $\mathbf{DER}(\sin)$ и $\cos$ совпадают. Это можно записать как $\mathbf{DER}(\sin) = \cos$, где знак $=$ следует понимать как равенство значений в подразумеваемой модели. Приведём ещё несколько равенств, выражающих свойства производной: $\mathbf{DER}(\lambda x.(x)) = \lambda x.(1)$, $\mathbf{DER}(\lambda x.(1)) = \lambda x.(0)$, $\mathbf{DER}(\lambda x.(0)) = \lambda x.(0)$, $\mathbf{DER}(\exp) = \exp$, $\mathbf{DER}(\cos) = \lambda x.(\text{TIMES}(-1)(\sin(x)))$, $\mathbf{DER}(\mathbf{DER}(\mathbf{DER}(\mathbf{DER}(\cos)))) = \cos$. Закон о производной суммы двух функций можно записать так: $\mathbf{DER}(\lambda x.(\text{PLUS}(f(x))(g(x)))) = \lambda x.(\text{PLUS}(\mathbf{DER}(f)(x))(\mathbf{DER}(g)(x)))$.

Упражнение 2.48. По аналогии с примером 2.47 выразить равенством лямбда-термов закон о производной произведения двух функций и закон о производной композиции двух функций.

Упражнение 2.49. Найти лямбда-терм без $\mathbf{DER}$, равный терму $\lambda y.(\mathbf{DER}(\lambda x.(\sin(y))))$ при указанных выше значениях констант $\sin$ и $\mathbf{DER}$.

Упражнение 2.50. Найти лямбда-терм без $\mathbf{DER}$, равный терму $\lambda y.(\mathbf{DER}(\lambda x.(\sin)(y)))$ при указанных выше значениях констант $\sin$ и $\mathbf{DER}$.

Упражнение 2.51. Найти тип и свободные переменные терма $\mathbf{DER}(\lambda x.(\sin(\exp(x))))(x)$

Упражнение 2.52. Найти тип и значение терма $\lambda x.(\lambda f.(\text{LESS}(f(x))(f(f(x)))))(\lambda x.(\text{TIMES}(x)(x)))$

2.3 Подстановка

[7, 2.2]

Определение 2.53. Для каждого типа $\tau \in \mathbf{Typ}$, терма α , переменной $x \in \mathbf{Var}_\tau$ и терма $\beta \in \mathbf{Term}_\tau$ определим *результат подстановки терма β в терм α вместо переменной x* (the result of the substitution of β for x in α) (обозначение $\alpha[x \mapsto \beta]$). Это понятие определяется индуктивно по построению терма α .

1. $x[x \mapsto \beta] = \beta$.
2. Если $y \in \mathbf{Var}$ и $y \neq x$, то $y[x \mapsto \beta] = y$.

3. Если $c \in \mathbf{Con}$, то $c[x \mapsto \beta] \equiv c$.
4. $\gamma(\delta)[x \mapsto \beta] \equiv \gamma[x \mapsto \beta](\delta[x \mapsto \beta])$.
5. $\lambda x.(\gamma)[x \mapsto \beta] \equiv \lambda x.(\gamma)$.
6. Если $y \in \mathbf{Var}$ и $y \neq x$, то $\lambda y.(\gamma)[x \mapsto \beta] \equiv \lambda y.(\gamma[x \mapsto \beta])$.

Пример 2.54. Согласно определению 2.53 $\text{PLUS}(x)(x)[x \mapsto 2] = \text{PLUS}(2)(2)$ и $\text{DER}(\lambda x.(\sin(\exp(x))))(x)[x \mapsto \cos(y)] = \text{DER}(\lambda x.(\sin(\exp(x))))(\cos(y))$.

Лемма 2.55. Пусть $\sigma \in \mathbf{Typ}$, $\tau \in \mathbf{Typ}$, $\alpha \in \mathbf{Term}_\sigma$, $x \in \mathbf{Var}_\tau$, $\beta \in \mathbf{Term}_\tau$. Тогда $\alpha[x \mapsto \beta] \in \mathbf{Term}_\sigma$.

Лемма 2.56. Если $x \notin \mathbf{Free}(\alpha)$, то $\alpha[x \mapsto \beta] = \alpha$.

Лемма 2.57. Если $x \notin \mathbf{Free}(\beta)$, то $x \notin \mathbf{Free}(\alpha[x \mapsto \beta])$.

Пример 2.58. Согласно определению 2.53 $\lambda x.(\text{MINUS}(x)(y))[y \mapsto \sin(z)] = \lambda x.(\text{MINUS}(x)(\sin(z)))$. Аналогично $\lambda z.(\text{MINUS}(z)(y))[y \mapsto \sin(z)] = \lambda z.(\text{MINUS}(z)(\sin(z)))$, но такая подстановка не соответствует интуиции о желаемом значении результата подстановки. Говорят, что такая подстановка “не является свободной”. Следующее определение вводит понятие, позволяющее дать формальное определение свободной подстановки.

Определение 2.59. Определим понятие “терм β является свободным для переменной x в терме α ” (β is free for x in α) (обозначение $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \alpha)$) индуктивно по построению терма α .

1. Если $\alpha \in \mathbf{Var}$ или $\alpha \in \mathbf{Con}$, то утверждение $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \alpha)$ истинно.
2. $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \gamma(\delta)) \leftrightarrow \mathbf{FreeFor}(\beta, x, \gamma) \wedge \mathbf{FreeFor}(\beta, x, \delta)$.
3. $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \lambda y.(\gamma)) \leftrightarrow x \notin \mathbf{Free}(\gamma) \vee y \notin \mathbf{Free}(\beta) \wedge \mathbf{FreeFor}(\beta, x, \gamma) \vee x = y$.

Определение 2.60. Подстановка $\alpha[x \mapsto \beta]$ называется *свободной* (free), если выполняется условие $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \alpha)$.

Упражнение 2.61. Верно ли $\mathbf{FreeFor}(y, x, \lambda y.y)$?

Упражнение 2.62. Верно ли $\mathbf{FreeFor}(f(y), x, \lambda y.x)$?

Упражнение 2.63. Верно ли $\mathbf{FreeFor}(y, x, \lambda y.x)$?

Упражнение 2.64. Верно ли $\mathbf{FreeFor}(y, x, \lambda y.f(x))$?

Упражнение 2.65. Верно ли $\mathbf{FreeFor}(y, x, \lambda y.(f)(x))$?

Упражнение 2.66. Верно ли $\mathbf{FreeFor}(y, x, \text{DER}(\lambda y.y)(x))$?

Упражнение 2.67. Верно ли $\mathbf{FreeFor}(\lambda y.y, f, \lambda y.\lambda f.\text{DER}(f)(y))$?

Упражнение 2.68. Верно ли $\mathbf{FreeFor}(y, x, \text{DER}(\lambda y.\sin(x))(\text{DER}(\lambda y.y)(x)))$?

Упражнение 2.69. Верно ли $\mathbf{FreeFor}(\sin(z), z, \lambda z.(\text{TIMES}(z)(z)))$?

Лемма 2.70. Если $x \notin \mathbf{Free}(\alpha)$, то $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \alpha)$.

Лемма 2.71. Если $\mathbf{Free}(\beta) = \emptyset$, то $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \alpha)$.

Лемма 2.72. Если α не содержит связанных вхождений переменных, принадлежащих множеству $\mathbf{Free}(\beta)$, то $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \alpha)$.

Лемма 2.73. Если $x \in \mathbf{Free}(\alpha)$ и $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \alpha)$, то $\mathbf{Free}(\alpha[x \mapsto \beta]) = (\mathbf{Free}(\alpha) - \{x\}) \cup \mathbf{Free}(\beta)$.

Лемма 2.74. Если $y \notin \mathbf{Free}(\alpha)$, то $\mathbf{FreeFor}(x, y, \alpha[x \mapsto y])$.

Лемма 2.75. Если $y \notin \mathbf{Free}(\alpha)$ и $\mathbf{FreeFor}(y, x, \alpha)$, то $\alpha[x \mapsto y][y \mapsto x] = \alpha$.

2.4 Исчисление

[7, 2.4]

В лямбда-исчислении (lambda-calculus) выводятся утверждения вида $\alpha \Rightarrow \beta$, где $\alpha \in \mathbf{Term}$ и $\beta \in \mathbf{Term}$. Если $\alpha \Rightarrow \beta$ выводимо, то пишут $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

Лямбда-исчисление содержит следующие аксиомы и правила.

1. Если $y \notin \mathbf{Free}(\alpha)$ и $\mathbf{FreeFor}(y, x, \alpha)$, то $\vdash \lambda x.(\alpha) \Rightarrow \lambda y.(\alpha[x \mapsto y])$. Это аксиома α -редукции (α -reduction).
2. Если $\mathbf{FreeFor}(\beta, x, \alpha)$, то $\vdash \lambda x.(\alpha)(\beta) \Rightarrow \alpha[x \mapsto \beta]$. Это аксиома β -редукции (β -reduction).
3. Если $x \notin \mathbf{Free}(\alpha)$, то $\vdash \lambda x.(\alpha(x)) \Rightarrow \alpha$. Это аксиома η -редукции (η -reduction).
4. $\vdash \alpha \Rightarrow \alpha$.
5. Если $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$ и $\vdash \beta \Rightarrow \gamma$, то $\vdash \alpha \Rightarrow \gamma$.
6. Если $\vdash \alpha \Rightarrow \alpha'$ и $\vdash \beta \Rightarrow \beta'$, то $\vdash \alpha(\beta) \Rightarrow \alpha'(\beta')$.
7. Если $\vdash \alpha \Rightarrow \alpha'$, то $\vdash \lambda x.(\alpha) \Rightarrow \lambda x.(\alpha')$.

Пример 2.76. По α -редукции $\lambda y. \text{DER}(\lambda y. \sin(\exp(y)))(y) \Rightarrow \lambda y_1. \text{DER}(\lambda y_2. \sin(\exp(y_2)))(y_1)$, где $y_1, y_2 \in \text{Var}_{\text{Real}}$.

Пример 2.77. По α -редукции

$$\lambda x. (\text{MINUS}(x)(\text{DER}(\lambda x. \text{TIMES}(x)(x))(z))) \Rightarrow \lambda x_1. (\text{MINUS}(x_1)(\text{DER}(\lambda x_2. \text{TIMES}(x_2)(x_2))(z))),$$

где $x_1, x_2 \in \text{Var}_{\text{Real}}$.

Пример 2.78. По β -редукции $\lambda x. (\text{PLUS}(x)(x))(2) \Rightarrow \text{PLUS}(2)(2)$.

Лемма 2.79. Если $\vdash \beta \Rightarrow \beta'$, то $\alpha[x \mapsto \beta] \Rightarrow \alpha[x \mapsto \beta']$.

Пример 2.80. Из примера 2.78 и леммы 2.79 следует, что

$$\text{TIMES}(\lambda x. (\text{PLUS}(x)(x))(2)) \Rightarrow \text{TIMES}(\text{PLUS}(2)(2)).$$

Пример 2.81. Пусть $u, v, w \in \text{Var}_{\text{Real}}$. Тогда $\lambda u. (\lambda v. (\text{MINUS}(v)(u)))(w) \Rightarrow \lambda v. (\text{MINUS}(v)(w))$, но $\lambda u. (\lambda v. (\text{MINUS}(v)(u)))(v) \not\Rightarrow \lambda v. (\text{MINUS}(v)(v))$, так как не выполняется условие $\text{FreeFor}(v, u, \lambda v. (\text{MINUS}(v)(u)))$.

Терм $\lambda u. (\lambda v. (\text{MINUS}(v)(u)))(v)$ всё же можно редуцировать, если использовать сначала α -редукцию, а потом β -редукцию. По α -редукции получаем $\lambda v. (\text{MINUS}(v)(u)) \Rightarrow \lambda y. (\text{MINUS}(y)(u))$, $\lambda u. (\lambda v. (\text{MINUS}(v)(u))) \Rightarrow \lambda u. (\lambda y. (\text{MINUS}(y)(u)))$, $\lambda u. (\lambda v. (\text{MINUS}(v)(u)))(v) \Rightarrow \lambda u. (\lambda y. (\text{MINUS}(y)(u)))(v)$. По β -редукции имеем $\lambda u. (\lambda y. (\text{MINUS}(y)(u)))(v) \Rightarrow \lambda y. (\text{MINUS}(y)(v))$. Следовательно, $\lambda u. (\lambda v. (\text{MINUS}(v)(u)))(v) \Rightarrow \lambda y. (\text{MINUS}(y)(v))$.

Пример 2.82. По β -редукции $\lambda f. (f(f(x)))(\cos) \Rightarrow \cos(\cos(x))$.

Пример 2.83. По β -редукции $\lambda x. (\lambda y. (\text{MINUS}(x)(y)))(1)(2) \Rightarrow \lambda y. (\text{MINUS}(1)(y))(2) \Rightarrow \text{MINUS}(1)(2)$.

Пример 2.84. По β -редукции $\lambda x. (\lambda y. (\text{MINUS}(x)(y)))(1)(2) \Rightarrow \lambda y. (\text{MINUS}(2)(y))(1) \Rightarrow \text{MINUS}(2)(1)$. К тому же результату приводит и последовательность редукций $\lambda x. (\lambda y. (\text{MINUS}(x)(y)))(1)(2) \Rightarrow \lambda x. (\text{MINUS}(x)(1))(2) \Rightarrow \text{MINUS}(2)(1)$.

Пример 2.85. По η -редукции $\lambda x. \cos(x) \Rightarrow \cos$ и $\lambda x. \text{MINUS}(y)(x) \Rightarrow \text{MINUS}(y)$.

Пример 2.86. К термам $\lambda x. \text{MINUS}(x)(1)$, $\lambda x. \cos(\exp(x))$, $\lambda x. \text{TIMES}(x)(x)$, $\lambda x. \lambda y. \text{MINUS}(y)(x)$ невозможно применить η -редукцию.

Определение 2.87. На множестве всех термов определено бинарное отношение $=_{\alpha} \gamma =_{\alpha} \delta$ истинно тогда и только тогда, когда в лямбда-исчислении можно вывести $\gamma \Rightarrow \delta$ без применения β -редукции и η -редукции.

Теорема 2.88. Отношение $=_{\alpha}$ является отношением эквивалентности (то есть оно рефлексивно, симметрично и транзитивно).

Определение 2.89. Если $\gamma =_{\alpha} \delta$, то говорят, что термы γ и δ являются α -эквивалентными (α -equivalent; alphabetic variants).

Определение 2.90. Терм называется η -редексом (η -redex), если к нему применима η -редукция.

Определение 2.91. Терм называется β -редексом (β -redex), если он α -эквивалентен некоторому терму, к которому применима β -редукция.

Определение 2.92. Если терм не содержит в качестве подтерма ни одного β -редекса или η -редекса, то говорят, что этот терм находится в β, η -нормальной форме (β, η normal form) или просто в нормальной форме. Если $\alpha \Rightarrow \alpha'$ и терм α' находится в нормальной форме, то говорят, что α' является нормальной формой (normal form) терма α .

Упражнение 2.93. Привести к нормальной форме терм $\lambda x. (\lambda x. x)(f(x))$.

Упражнение 2.94. Привести к нормальной форме терм $\lambda x. (\lambda y. x)(\sin(y))$.

Упражнение 2.95. Привести к нормальной форме терм $\lambda x. (\text{DER}(\lambda y. y)(x))(y)$.

Константы из следующего примера будут использоваться во многих дальнейших примерах. При этом типы переменных не будут явно указываться, если они ясны из контекста.

Пример 2.96. Пусть $\text{BasTyp} = \{\text{Ind}, \text{Bool}\}$, $\text{CHRIS} \in \text{Con}_{\text{Ind}}$, $\text{RUN} \in \text{Con}_{\text{Ind} \rightarrow \text{Bool}}$, $\text{SEE} \in \text{Con}_{\text{Ind} \rightarrow \text{Ind} \rightarrow \text{Bool}}$. Тогда $\text{RUN} \in \text{Term}_{\text{Ind} \rightarrow \text{Bool}}$ и $\text{SEE}(\text{CHRIS}) \in \text{Term}_{\text{Ind} \rightarrow \text{Bool}}$.

В подразумеваемой модели типу Ind соответствует множество индивидов. Терм $\text{RUN}(\alpha)$ истинен, если индивид, обозначаемый термом α , бежит. Терм $\text{SEE}(\beta)(\alpha)$ истинен, если индивид, обозначаемый термом α , видит индивида, обозначаемого термом β .

Аналогичные подразумеваемые значения приписываются константам

AFRICA, BILL, JOHN, MARY, VAL $\in \mathbf{Con}_{\mathbf{Ind}}$,
 HESITATE, THINK, SING $\in \mathbf{Con}_{\mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Bool}}$,
 LIKE, HATE, LOVE $\in \mathbf{Con}_{\mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Bool}}$,
 GIVE $\in \mathbf{Con}_{\mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Bool}}$,
 EVERYWHERE $\in \mathbf{Con}_{(\mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Bool}) \rightarrow \mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Bool}}$.

Упражнение 2.97. Найти тип λ -терма $\lambda x.(\lambda y.(\text{GIVE}(x)(y)(z)))(\text{JOHN})$, если $x \in \mathbf{Var}_{\mathbf{Ind}}$, $y \in \mathbf{Var}_{\mathbf{Ind}}$, $z \in \mathbf{Var}_{\mathbf{Ind}}$, $\text{GIVE} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Bool}}$, $\text{JOHN} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Ind}}$.

Упражнение 2.98. Привести к нормальной форме терм $\lambda x.(\text{SING}(x))(\text{JOHN})$.

Упражнение 2.99. Привести к нормальной форме терм $\lambda y.\text{LIKE}(x)(y)$.

Упражнение 2.100. Привести к нормальной форме терм $\lambda y.\text{LIKE}(y)(x)$.

Упражнение 2.101. Привести к нормальной форме терм $\lambda z.\text{HATE}(z)(z)$.

Упражнение 2.102. Привести к нормальной форме терм $\lambda x.(\lambda y.(\text{GIVE}(x)(x)(y)))$.

Упражнение 2.103. Привести к нормальной форме терм $\lambda R.(\text{R}(\text{MARY}))(\lambda y.\lambda x.\text{LIKE}(x)(y))$.

Упражнение 2.104. Привести к нормальной форме терм $\lambda R.(\text{R}(x))(\lambda y.\lambda x.\text{LIKE}(x)(y))$.

Упражнение 2.105. Привести к нормальной форме терм

$\lambda f.(\lambda g.\lambda x.\text{AND}(f(x))(g(x)))(\text{SING})(\text{LIKE}(x))$.

Упражнение 2.106. Привести к нормальной форме терм $\lambda f.(\lambda x.\lambda y.f(y)(x))(\text{LIKE})$.

Упражнение 2.107. Привести к нормальной форме терм $\lambda f.(\lambda x.\lambda y.f(y)(x))(\lambda x.\lambda y.\text{LIKE}(y)(x))$.

Упражнение 2.108. Привести к нормальной форме терм $\lambda f.(\lambda x.\lambda y.\text{AND}(f(y)(x))(f(x)(y)))(\text{HATE})$.

Упражнение 2.109. Привести к нормальной форме терм $\lambda R.(\lambda f.R(\text{R}(f(\text{JOHN}))))(\text{NOT})(\text{RUN})$.

Упражнение 2.110. Привести к нормальной форме терм $\lambda x.(\text{LIKE}(x)(x))(\text{THE}(\lambda x.(\text{RUN}(x))))$.

Теорема 2.111 (свойство Чёрча—Россера (the Church—Rosser theorem), без доказательства). Если $\vdash \delta \Rightarrow \alpha$ и $\vdash \delta \Rightarrow \beta$, то найдётся такой терм γ , что $\vdash \alpha \Rightarrow \gamma$ и $\vdash \beta \Rightarrow \gamma$.

Определение 2.112. На множестве всех термов определено бинарное отношение $\Leftrightarrow: \alpha \Leftrightarrow \beta$ истинно тогда и только тогда, когда найдётся такой терм γ , что $\vdash \alpha \Rightarrow \gamma$ и $\vdash \beta \Rightarrow \gamma$. Запись $\alpha \Leftrightarrow \beta$ читается: “термы α и β доказуемо эквивалентны” (provably equivalent).

Пример 2.113. Все четыре терма из примера 2.37 эквивалентны.

Теорема 2.114. Отношение $\Leftrightarrow$ является отношением эквивалентности (то есть оно рефлексивно, симметрично и транзитивно).

Лемма 2.115. Если $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$, то найдётся такой тип $\tau \in \mathbf{Typ}$, что $\alpha \in \mathbf{Term}_\tau$ и $\beta \in \mathbf{Term}_\tau$.

Лемма 2.116. Если $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$, то $\mathbf{Free}(\beta) \subseteq \mathbf{Free}(\alpha)$.

Пример 2.117. По β -редукции $\lambda x.(\text{cos}(0))(y) \Rightarrow \text{cos}(0)$. Заметим, что $\mathbf{Free}(\text{cos}(0)) \subsetneq \mathbf{Free}(\lambda x.(\text{cos}(0))(y))$.

Теорема 2.118 (без доказательства). Не существует такой бесконечной последовательности термов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, чтобы для каждого i выполнялось $\alpha_i \Rightarrow \alpha_{i+1}$ и $\alpha_i \neq_\alpha \alpha_{i+1}$.

Лемма 2.119. У каждого терма есть нормальная форма. Она определена однозначно с точностью до α -эквивалентности.

3 Категориальная грамматика

[7, Ch. 4], [2, с. 123–136]

3.1 Синтаксические категории

[7, с. 112–113]

Определение 3.1. Множество *простейших категорий* (basic categories) $\mathbf{BasCat}$ — произвольное непустое конечное множество.

Пример 3.2. Во многих лингвистических примерах используется набор $\mathbf{BasCat} = \{np, n, s\}$, где np , n и s приблизительно соответствуют понятиям “именная группа” (noun phrase), “существительное” (noun) и “предложение” (sentence).

Определение 3.3. Множество *категорий* (categories) определяется индуктивно.

1. $\mathbf{BasCat} \subseteq \mathbf{Cat}$.

2. Если $A \in \mathbf{Cat}$ и $B \in \mathbf{Cat}$, то $(A/B) \in \mathbf{Cat}$ и $(A \setminus B) \in \mathbf{Cat}$.

Пример 3.4. Пусть $\mathbf{BasCat} = \{np, n, s\}$. Тогда $n \in \mathbf{Cat}$, $np/n \in \mathbf{Cat}$ и $(np \setminus s)/np \in \mathbf{Cat}$.

Лемма 3.5. Множество $\mathbf{Cat}$ счётно.

3.2 Типы категорий

[7, с. 114–115]

Определение 3.6. Назначением типов (type assignment) называется любая функция $\text{Type}: \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Typ}$, удовлетворяющая условиям $\text{Type}(A/B) = \text{Type}(B) \rightarrow \text{Type}(A)$ и $\text{Type}(B \setminus A) = \text{Type}(B) \rightarrow \text{Type}(A)$.

Лемма 3.7. Функция Type определена однозначно, если даны значения $\text{Type}(A)$ для всех $A \in \mathbf{BasCat}$.

Пример 3.8. Используем $\mathbf{BasCat}$ из примера 3.2. Пусть $\mathbf{BasTyp} = \{\mathbf{Bool}, \mathbf{Ind}\}$, $\text{Type}(np) = \mathbf{Ind}$, $\text{Type}(s) = \mathbf{Bool}$ и $\text{Type}(n) = \mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Bool}$. Тогда $\text{Type}(np/n) = (\mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Bool}) \rightarrow \mathbf{Ind}$ и $\text{Type}((np \setminus s)/np) = \mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Bool}$.

Упражнение 3.9. Пусть $\text{Type}(np) = \mathbf{Ind}$, $\text{Type}(s) = \mathbf{Bool}$, $\text{Type}(n) = \mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Bool}$. Найти $\text{Type}(((np \setminus s)/np)/n)$.

3.3 Категориальный словарь

[7, с. 115]

Определение 3.10. Множество *простейших выражений* (basic expressions) $\mathbf{BasExp}$ — произвольное непустое конечное множество.

Пример 3.11. $\mathbf{BasExp} = \{John, Mary, likes\}$.

Определение 3.12. Категориальным словарём (categorical lexicon) называется любое конечное множество $\mathbf{Lex} \subseteq \mathbf{BasExp} \times (\mathbf{Cat} \times \mathbf{Term})$, в котором для любой тройки $\langle e, \langle A, \alpha \rangle \rangle \in \mathbf{Lex}$ выполняется условие $\alpha \in \mathbf{Term}_{\text{Type}(A)}$. Обычно вместо $\langle e, \langle A, \alpha \rangle \rangle$ пишут $e \Rightarrow \alpha : A$.

Пример 3.13. Продолжим примеры 3.8 и 3.11. Пусть $\mathbf{JOHN} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Ind}}$, $\mathbf{MARY} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Ind}}$ и $\mathbf{LIKE} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Bool}}$. Тогда $\mathbf{Lex} = \{John \Rightarrow \mathbf{JOHN} : np, Mary \Rightarrow \mathbf{MARY} : np, likes \Rightarrow \mathbf{LIKE} : (np \setminus s)/np\}$ является категориальным словарём.

3.4 Базовая категориальная грамматика

[7, с. 119]

Справка 3.14. И. Бар-Хиллел (Yehoshua Bar-Hillel) — израильский математик.

Справка 3.15. Х. Гайфман (Chaim Gaifman) — израильский математик.

Определение 3.16. Выражениями (expressions) называются непустые конечные последовательности простейших выражений. Обозначим множество всех выражений $\mathbf{Exp}$.

Определение 3.17. Пусть дан категориальный словарь $\mathbf{Lex}$. Множеством значений (phrase-structure denotation) выражения e (обозначение $\llbracket e \rrbracket_{\mathbf{Lex}}$ или просто $\llbracket e \rrbracket$) является некоторое множество пар $\alpha : A$, где $\alpha \in \mathbf{Term}$ и $A \in \mathbf{Cat}$. Множество $\llbracket e \rrbracket$ определяется индуктивно следующим образом.

1. Если $(e \Rightarrow \alpha : A) \in \mathbf{Lex}$, то $\alpha : A \in \llbracket e \rrbracket$.
2. Если $\alpha : A/B \in \llbracket e_1 \rrbracket$ и $\beta : B \in \llbracket e_2 \rrbracket$, то $\alpha(\beta) : A \in \llbracket e_1 e_2 \rrbracket$.
3. Если $\beta : B \in \llbracket e_1 \rrbracket$ и $\alpha : B \setminus A \in \llbracket e_2 \rrbracket$, то $\alpha(\beta) : A \in \llbracket e_1 e_2 \rrbracket$.

Пример 3.18. Рассмотрим словарь из примера 3.13. Тогда

$$\mathbf{LIKE}(\mathbf{MARY})(\mathbf{JOHN}) : s \in \llbracket John \text{ likes } Mary \rrbracket.$$

Лемма 3.19. Если $\alpha : A \in \llbracket e \rrbracket$, то $\alpha \in \mathbf{Term}_{\text{Type}(A)}$.

Определение 3.20. Базовая категориальная грамматика (basic categorical grammar) состоит из категориального словаря $\mathbf{Lex}$ и выделенной категории H . Формальный язык, порождаемый базовой категориальной грамматикой $\langle \mathbf{Lex}, H \rangle$, состоит из всех выражений $e \in \mathbf{Exp}$, для которых найдётся терм α , удовлетворяющий условию $\alpha : H \in \llbracket e \rrbracket$.

Замечание 3.21. Формальный язык, порождаемый базовой категориальной грамматикой, является подмножеством множества $\mathbf{BasExp}^+$.

Замечание 3.22. Категориальные грамматики с левым и правым делением были введены И. Бар-Хиллелом в [23]. В категориальных грамматиках информация о синтаксической сочетаемости содержится не в правилах грамматики, а в словаре [2, с. 152]. При этом правила едины для всех моделируемых языков.

Теорема 3.23 (без доказательства). *Рассмотрим алфавит $\mathbf{BasExp}$ и формальный язык $L \subseteq \mathbf{BasExp}^+$. Язык L порождается некоторой базовой категориальной грамматикой тогда и только тогда, когда он является контекстно-свободным.*

Замечание 3.24. Доказательство теоремы 3.23 можно найти в [24].

Пример 3.25. Расширим пример 3.13, положив в словарь следующие простейшие выражения.

категория	простейшие выражения
np	<i>John, Mary, Bill, Val, Africa, Europe, illiteracy</i>
$np \backslash s$	<i>runs, jumps, thinks, sings, comes, goes, dances, falls, walks, laughs, works, rises, sleeps</i>
n	<i>man, job, bird, hat, boy, girl, flower, box, name, tourist</i>
np/n	<i>a, the, every</i>
n/n	<i>tall, honest, wicked, lazy, poor, little, brown</i>
$(n/n)/(n/n)$	<i>relatively</i>
$(np \backslash s)/np$	<i>likes, finds, hates, loves, touches, sees, buys, has, hits, meets, elects</i>
$np \backslash (s/np)$	<i>likes, finds, hates, loves, touches, sees, buys, has, hits, meets, elects</i>
$(n \backslash n)/np$	<i>with, without</i>
$s \backslash (s/s)$	<i>or, if</i>
$((np \backslash s)/np)/np$	<i>gives, shows, sends</i>
$(np \backslash s)/s$	<i>believes, says</i>
$(np \backslash s) \backslash (np \backslash s)$	<i>slowly, charmingly, everywhere, outside</i>
$n \backslash n$	<i>outside</i>
$((np \backslash s) \backslash (np \backslash s))/np$	<i>in, on</i>
$(n \backslash n)/np$	<i>in, on</i>

В качестве лямбда-термов используются константы подходящего типа. Например, так как первая строка содержит элемент *Bill*, то в множество $\mathbf{Lex}$ добавляется элемент $Bill \Rightarrow \text{BILL} : np$, где $\text{BILL} \in \mathbf{Con}_{\text{Ind}}$.

Упражнение 3.26. Вычислить значение выражения *sings slowly*.

Упражнение 3.27. Вычислить значение выражения *the tall student loves Mary*.

3.5 Исчисление Ламбека без умножения

[7, 5.1]

Справка 3.28. И. Ламбек (Jim Lambek) (р. 1922) — канадский математик.

В 1958 г. канадский математик Джим Ламбек определил секвенциальное исчисление для математически строгого описания синтаксиса формальных и естественных языков. В 1983 г. голландский математик Йохан ван Бентем добавил к синтаксическому исчислению Ламбека семантическую составляющую, используя лямбда-термы. В этом разделе мы рассмотрим полученное таким образом исчисление, включающее как синтаксическую, так и семантическую составляющую.

В оригинальном исчислении Ламбека используются три бинарные операции — левое деление ($\backslash$), правое деление ($/$) и умножение ($\cdot$). В этом разделе мы приведём определение фрагмента без умножения.

Определение 3.29. Определим исчисление L . Выводимыми объектами этого исчисления являются записи вида $\alpha_1 : A_1, \dots, \alpha_n : A_n \rightarrow \beta : B$, где $n \geq 1$ (такая запись называется *секвенцией* (sequent)). Заглавными греческими буквами будем обозначать конечные последовательности пар вида $\alpha : A$.

Аксиомы исчисления L имеют вид $\alpha : A \rightarrow \alpha : A$. Выводы строятся с помощью следующих правил:

$$\frac{x : A, \Pi \rightarrow \beta : B}{\Pi \rightarrow \lambda x.(\beta) : A \backslash B} \quad (\rightarrow \backslash), \text{ где } \Pi \text{ непуста и } x \text{ — новая переменная из } \mathbf{Var}_{\text{Type}(A)},$$

$$\frac{\Pi \rightarrow \alpha : A \quad \Gamma, \beta(\alpha) : B, \Delta \rightarrow \gamma : C}{\Gamma, \Pi, \beta : (A \setminus B), \Delta \rightarrow \gamma : C} (\setminus \rightarrow),$$

$$\frac{\Pi, x : A \rightarrow \beta : B}{\Pi \rightarrow \lambda x.(\beta) : B/A} (\rightarrow /), \text{ где } \Pi \text{ непуста и } x \text{ — новая переменная из } \mathbf{Var}_{\text{Type}(A)},$$

$$\frac{\Pi \rightarrow \alpha : A \quad \Gamma, \beta(\alpha) : B, \Delta \rightarrow \gamma : C}{\Gamma, \beta : (B/A), \Pi, \Delta \rightarrow \gamma : C} (/ \rightarrow).$$

Будем писать $L \vdash \Pi \rightarrow \alpha : A$, если секвенция $\Pi \rightarrow \alpha : A$ выводима в исчислении L.

Пример 3.30. $L \vdash \text{THE} : (np/n), \text{MAN} : n \rightarrow \text{THE}(\text{MAN}) : np$.

Упражнение 3.31. Выводима ли секвенция $\text{JOHN} : np, \text{RUN} : (np \setminus s) \rightarrow \text{RUN}(\text{JOHN}) : s$?

Упражнение 3.32. Выводима ли секвенция $\text{RUN} : (np \setminus s), \text{JOHN} : np \rightarrow \text{RUN}(\text{JOHN}) : s$?

Упражнение 3.33. Выводима ли секвенция

$\text{JOHN} : np, \text{LIKE} : ((np \setminus s)/np), \text{MARY} : np \rightarrow \text{LIKE}(\text{JOHN})(\text{MARY}) : s$?

Упражнение 3.34. Выводима ли секвенция

$\text{JOHN} : np, \text{GIVE} : (((np \setminus s)/np)/np), \text{MARY} : np, \text{THE} : (np/n), \text{FLOWER} : n \rightarrow \text{GIVE}(\text{MARY})(\text{THE}(\text{FLOWER}))(\text{JOHN}) : s$?

Упражнение 3.35. Найти лямбда-терм α , для которого выводима секвенция

$L \vdash \text{TALL} : (n/n), \text{HAT} : n \rightarrow \alpha : n$.

Упражнение 3.36. Найти лямбда-терм α , для которого выводима секвенция

$L \vdash \text{GIVES} : (((np \setminus s)/np)/np), \text{MARY} : np, \text{THE} : (np/n), \text{FLOWER} : n \rightarrow \alpha : (np \setminus s)$.

Упражнение 3.37. Выводима ли секвенция

$L \vdash \text{SEE} : ((np \setminus s)/np) \rightarrow \lambda x_1. \lambda x_2. \text{SEE}(x_2)(x_1) : (np \setminus (s/np))$?

Ответ 3.37. Да.

$$\frac{\frac{\frac{x_1 : np \rightarrow x_1 : np \quad \text{SEE}(x_2)(x_1) : s \rightarrow \text{SEE}(x_2)(x_1) : s}{x_1 : np, \text{SEE}(x_2) : (np \setminus s) \rightarrow \text{SEE}(x_2)(x_1) : s} (\setminus \rightarrow)}{x_2 : np \rightarrow x_2 : np \quad x_1 : np, \text{SEE}(x_2) : (np \setminus s) \rightarrow \text{SEE}(x_2)(x_1) : s} (/ \rightarrow)}{\frac{x_1 : np, \text{SEE} : ((np \setminus s)/np), x_2 : np \rightarrow \text{SEE}(x_2)(x_1) : s}{x_1 : np, \text{SEE} : ((np \setminus s)/np) \rightarrow \lambda x_2. \text{SEE}(x_2)(x_1) : (s/np)} (\rightarrow /)}{\text{SEE} : ((np \setminus s)/np) \rightarrow \lambda x_1. \lambda x_2. \text{SEE}(x_2)(x_1) : (np \setminus (s/np))} (\rightarrow \setminus).$$

3.6 Категориальные грамматики Ламбека

[7, 5.1]

Определение 3.38. Каждая категориальная грамматика Ламбека основана на категориальном словаре **Lex**, определяемом так же, как в базовой категориальной грамматике. Но в грамматике Ламбека выражению $e_1 \dots e_n$, где $e_i \in \mathbf{BasExp}$, ставится в соответствие значение $\alpha : A$ (обозначение $e_1 \dots e_n \Rightarrow \alpha : A$), если $(e_1 \Rightarrow \alpha_1 : A_1) \in \mathbf{Lex}, \dots, (e_n \Rightarrow \alpha_n : A_n) \in \mathbf{Lex}$ и $L \vdash \alpha_1 : A_1, \dots, \alpha_n : A_n \rightarrow \alpha : A$ для некоторых $\alpha_1, A_1, \dots, \alpha_n, A_n$.

Пример 3.39. Значением выражения *the girl dances* является терм $\text{DANCE}(\text{THE}(\text{GIRL}))$.

Пример 3.40. Пусть $\text{whom} \Rightarrow \lambda P. \lambda Q. \lambda x. \text{AND}(P(x))(Q(x)) : (n \setminus n)/(s/np)$. Тогда значением выражения *the girl whom John likes hates John* является $\text{HATE}(\text{JOHN})(\text{THE}(\lambda x. \text{AND}(\text{LIKE}(x)(\text{JOHN}))(\text{GIRL}(x)))) : s$.

В следующих упражнениях используется словарь из примера 3.25.

Упражнение 3.41. Найти значения (с категорией s) выражения *Africa sings*.

Упражнение 3.42. Найти значения (с категорией s) выражения *Mary sings everywhere*.

Упражнение 3.43. Найти значения (с категорией s) выражения *Mary likes the flower*.

Упражнение 3.44. Найти значения (с категорией s) выражения *John shows Mary Africa*.

Упражнение 3.45. Найти значения (с категорией s) выражения *John shows the relatively honest professor a wicked little boy with a tall hat*.

Упражнение 3.46. Найти значения (с категорией s) выражения *John likes the girl*.

4 Синтаксическое исчисление Ламбека

4.1 Определение

Рассмотрим синтаксическое исчисление L , введенное И. Ламбеком в 1958 г. Его принято называть *синтаксическим исчислением Ламбека* (Lambek syntactic calculus) или просто *исчислением Ламбека* (Lambek calculus). Предполагаем, что задано счетное множество $Pr = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$, элементы которого будем называть *примитивными типами*. Типы исчисления Ламбека строятся из примитивных типов с помощью трех бинарных связок $\cdot$, $\backslash$, $/$. Обозначим множество всех типов, построенных таким образом, через Tr . Прописные буквы латинского алфавита будем использовать для обозначения типов исчисления Ламбека, а прописные греческие буквы — для обозначения конечных (не обязательно непустых) последовательностей типов. Символ Λ будет всегда обозначать пустую последовательность типов.

Выводимыми объектами исчисления Ламбека являются секвенции вида $\Gamma \rightarrow A$, где $\Gamma \neq \Lambda$. Аксиомы имеют вид $A \rightarrow A$. Выводы строятся с помощью следующих правил:

$$\begin{array}{l} \frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \backslash B} (\rightarrow \backslash), \text{ где } \Pi \neq \Lambda, \quad \frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, (A \backslash B), \Delta \rightarrow C} (\backslash \rightarrow), \\ \frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A} (\rightarrow /), \text{ где } \Pi \neq \Lambda, \quad \frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, (B / A), \Pi, \Delta \rightarrow C} (/ \rightarrow), \\ \frac{\Gamma \rightarrow A \quad \Delta \rightarrow B}{\Gamma, \Delta \rightarrow A \cdot B} (\rightarrow \cdot), \quad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, (A \cdot B), \Delta \rightarrow C} (\cdot \rightarrow), \\ \frac{\Pi \rightarrow B \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow A}{\Gamma, \Pi, \Delta \rightarrow A} (\text{cut}). \end{array}$$

Будем писать $L \vdash \Gamma \rightarrow A$, если секвенция $\Gamma \rightarrow A$ выводима в исчислении Ламбека.

Пример 4.1. $L \vdash ((p_1 \backslash p_2) / p_3) \rightarrow (p_1 \backslash (p_2 / p_3))$:

$$\begin{array}{c} \frac{p_1 \rightarrow p_1 \quad p_2 \rightarrow p_2}{p_1, (p_1 \backslash p_2) \rightarrow p_2} (\backslash \rightarrow) \\ \frac{p_3 \rightarrow p_3 \quad p_1, (p_1 \backslash p_2) \rightarrow p_2}{p_1, ((p_1 \backslash p_2) / p_3), p_3 \rightarrow p_2} (/ \rightarrow) \\ \frac{p_1, ((p_1 \backslash p_2) / p_3), p_3 \rightarrow p_2}{p_1, ((p_1 \backslash p_2) / p_3) \rightarrow (p_2 / p_3)} (\rightarrow /) \\ \frac{p_1, ((p_1 \backslash p_2) / p_3) \rightarrow (p_2 / p_3)}{((p_1 \backslash p_2) / p_3) \rightarrow (p_1 \backslash (p_2 / p_3))} (\rightarrow \backslash). \end{array}$$

Упражнение 4.2. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $L \vdash A / B, B / C \rightarrow A / C$?

Ответ 4.2. Да.

$$\begin{array}{c} \frac{B \rightarrow B \quad A \rightarrow A}{A / B, B \rightarrow A} (/ \rightarrow) \\ \frac{C \rightarrow C \quad A / B, B \rightarrow A}{A / B, B / C, C \rightarrow A} (/ \rightarrow) \\ \frac{A / B, B / C, C \rightarrow A}{A / B, B / C \rightarrow A / C} (\rightarrow /) \end{array}$$

Упражнение 4.3. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $L \vdash A \rightarrow (B / A) \backslash B$?

Ответ 4.3. Да.

$$\begin{array}{c} \frac{A \rightarrow A \quad B \rightarrow B}{B / A, A \rightarrow B} (/ \rightarrow) \\ \frac{B / A, A \rightarrow B}{A \rightarrow (B / A) \backslash B} (\rightarrow \backslash) \end{array}$$

Определение 4.4. Длина типа A обозначается $\|A\|$ и определяется как суммарное количество вхождений примитивных типов и знаков бинарных операций в A :

$$\begin{array}{l} \|p_i\| = 1, \\ \|A \cdot B\| = \|A\| + \|B\| + 1, \\ \|A \backslash B\| = \|A\| + \|B\| + 1, \\ \|A / B\| = \|A\| + \|B\| + 1. \end{array}$$

4.2 Устранимость сечения

Приведём схему доказательства теоремы об устранимости сечения (см. [3]).

Теорема 4.5 (Ламбек). *Любую секвенцию, выводимую в исчислении Ламбека, можно вывести без использования правила (cut).*

Доказательство. Докажем индукцией по $\|\Phi\| + \|\Upsilon\| + \|\Psi\| + \|F\| + \|E\|$, что если секвенции $\Upsilon \rightarrow F$ и $\Phi F \Psi \rightarrow E$ выводимы в исчислении Ламбека без использования правила (cut), то секвенция $\Phi \Upsilon \Psi \rightarrow E$ тоже выводима без использования правила (cut). Надо рассмотреть несколько случаев.

Случай 1: $\Upsilon \rightarrow F$ является аксиомой.

Тогда заключение правила сечения совпадает с посылкой $\Phi F \Psi \rightarrow E$.

Случай 2: последним правилом в выводе секвенции $\Upsilon \rightarrow F$ является правило $(\setminus \rightarrow)$ и тип F не является главным типом этого правила.

Дано

$$\frac{\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma B \Delta \rightarrow F}{\Gamma \Pi(A \setminus B) \Delta \rightarrow F} (\setminus \rightarrow) \quad \Phi F \Psi \rightarrow E}{\Phi \Gamma \Pi(A \setminus B) \Delta \Psi \rightarrow E} (\text{cut}).$$

Перестроим вывод так:

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \frac{\Gamma B \Delta \rightarrow F \quad \Phi F \Psi \rightarrow E}{\Phi \Gamma B \Delta \Psi \rightarrow E} (\text{cut})}{\Phi \Gamma \Pi(A \setminus B) \Delta \Psi \rightarrow E} (\setminus \rightarrow).$$

Случай 3: В последних правилах выводов секвенций $\Upsilon \rightarrow F$ и $\Phi F \Psi \rightarrow E$ вводится главная связка для типа $F = A \setminus B$.

Дано

$$\frac{\frac{A \Upsilon \rightarrow B}{\Upsilon \rightarrow A \setminus B} (\rightarrow \setminus) \quad \frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma B \Delta \rightarrow E}{\Gamma \Pi(A \setminus B) \Delta \rightarrow E} (\setminus \rightarrow)}{\Gamma \Pi \Upsilon \Delta \rightarrow E} (\text{cut}).$$

Перестроим вывод так:

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \frac{A \Upsilon \rightarrow B \quad \Gamma B \Delta \rightarrow E}{\Gamma A \Upsilon \Delta \rightarrow E} (\text{cut})}{\Gamma \Pi \Upsilon \Delta \rightarrow E} (\text{cut}).$$

В остальных случаях вывод перестраивается аналогичным образом. $\square$

Пример 4.6. Рассмотрим вывод

$$\frac{\frac{\vdots}{p/q, q/r \rightarrow p/r} \quad p \rightarrow p}{p/q, q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow p} (\setminus \rightarrow) \quad \frac{\vdots}{p \rightarrow (s/p) \setminus s}}{p/q, q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow (s/p) \setminus s} (\text{cut}),$$

где p, q, r, s — примитивные типы и многоточиями обозначены конструкции из ответов упражнений 4.2 и 4.3. Алгоритм из доказательства теоремы 4.5 применяется к этому выводу следующим образом. Преобразование из случая 2 приведёт к выводу

$$\frac{\frac{\vdots}{p/q, q/r \rightarrow p/r} \quad p \rightarrow p}{p/q, q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow p} (\setminus \rightarrow) \quad \frac{\frac{\vdots}{p \rightarrow (s/p) \setminus s}}{p \rightarrow (s/p) \setminus s}}{p/q, q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow (s/p) \setminus s} (\text{cut}).$$

Далее, преобразование из случая 1 приведёт к искомому выводу

$$\frac{\frac{\vdots}{p/q, q/r \rightarrow p/r} \quad p \rightarrow p}{p/q, q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow p} (\setminus \rightarrow) \quad \frac{\vdots}{p \rightarrow (s/p) \setminus s}}{p/q, q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow (s/p) \setminus s} (\setminus \rightarrow).$$

Пример 4.7. Рассмотрим вывод

$$\frac{\frac{t \rightarrow t \quad p/q \rightarrow p/q}{t, t \setminus (p/q) \rightarrow p/q} (\setminus \rightarrow) \quad \frac{\vdots}{p/q, q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow (s/p) \setminus s}}{t, t \setminus (p/q), q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow (s/p) \setminus s} (\text{cut}),$$

где p, q, r, s, t — примитивные типы и многоточием обозначен вывод без сечения, построенный в примере 4.6. Алгоритм из доказательства теоремы 4.5 применяется к этому выводу следующим образом. Преобразование из случая 2 приведёт к выводу

$$\frac{t \rightarrow t \quad \frac{\frac{\vdots}{p/q \rightarrow p/q} \quad \frac{p/q, q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow (s/p) \setminus s}{p/q, q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow (s/p) \setminus s} (\text{cut})}{t, t \setminus (p/q), q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow (s/p) \setminus s} (\setminus \rightarrow).$$

Далее, преобразование из случая 1 приведёт к искомому выводу

$$\frac{t \rightarrow t \quad \frac{\vdots}{p/q, q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow (s/p) \setminus s}}{t, t \setminus (p/q), q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow (s/p) \setminus s} (\setminus \rightarrow).$$

Пример 4.8. Рассмотрим вывод

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{p/q, q/r \rightarrow p/r} \quad p \rightarrow p}{p/q, q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow p} (\setminus \rightarrow) \quad \frac{t \rightarrow t \quad p/q \rightarrow p/q}{t, t \setminus (p/q) \rightarrow p/q} (\setminus \rightarrow) \quad \frac{\vdots}{p \rightarrow (s/p) \setminus s}}{\frac{q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow (p/q) \setminus p}{t, t \setminus (p/q), q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow (s/p) \setminus s} (\text{cut}),} (\rightarrow \setminus)$$

где p, q, r, s, t — примитивные типы и многоточиями обозначены конструкции из ответов упражнений 4.2 и 4.3. Алгоритм устранения сечения из доказательства теоремы 4.5 применяется к этому выводу следующим образом. Преобразование из случая 3 приведёт к выводу

$$\frac{t \rightarrow t \quad p/q \rightarrow p/q}{t, t \setminus (p/q) \rightarrow p/q} (\setminus \rightarrow) \quad \frac{\frac{\frac{\vdots}{p/q, q/r \rightarrow p/r} \quad p \rightarrow p}{p/q, q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow p} (\setminus \rightarrow) \quad \frac{\vdots}{p \rightarrow (s/p) \setminus s}}{p/q, q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow (s/p) \setminus s} (\text{cut})$$

$$\frac{t, t \setminus (p/q), q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow (s/p) \setminus s}{t, t \setminus (p/q), q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow (s/p) \setminus s} (\text{cut}).$$

Остаётся устранить верхнее сечение (это сделано в примере 4.6), а затем нижнее сечение (это сделано в примере 4.7). В результате получим искомый вывод

$$\frac{t \rightarrow t \quad \frac{\frac{\vdots}{p/q, q/r \rightarrow p/r} \quad p \rightarrow (s/p) \setminus s}{p/q, q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow (s/p) \setminus s} (\setminus \rightarrow)}{t, t \setminus (p/q), q/r, (p/r) \setminus p \rightarrow (s/p) \setminus s} (\setminus \rightarrow).$$

Пример 4.9. Рассмотрим вывод

$$\frac{\frac{\vdots}{(n/n), n \rightarrow n} \quad np \rightarrow np}{(np/n), (n/n), n \rightarrow np} (\setminus \rightarrow) \quad \frac{\vdots}{np, ((np \setminus s)/np), np \rightarrow s}}{np, ((np \setminus s)/np), (np/n), (n/n), n \rightarrow s} (\text{cut}),$$

где n, np, s — примитивные типы. Алгоритм из доказательства теоремы 4.5 применяется к этому выводу следующим образом. Преобразование из случая 2 приведёт к выводу

$$\frac{\frac{\vdots}{(n/n), n \rightarrow n} \quad \frac{np \rightarrow np \quad \frac{\vdots}{np, ((np \setminus s)/np), np \rightarrow s} \text{ (cut)}}{np, ((np \setminus s)/np), (np/n), (n/n), n \rightarrow s} (\setminus \rightarrow).$$

Далее, преобразование из случая 1 приведёт к искомому выводу

$$\frac{\frac{\vdots}{(n/n), n \rightarrow n} \quad \frac{\vdots}{np, ((np \setminus s)/np), np \rightarrow s}}{np, ((np \setminus s)/np), (np/n), (n/n), n \rightarrow s} (\setminus \rightarrow).$$

4.3 Примеры выводов

Упражнение 4.10. Выводима ли секвенция $(p_2/p_1)p_1(p_1 \setminus p_1) \rightarrow p_2$?

Упражнение 4.11. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $(A \cdot B) \cdot C \rightarrow A \cdot (B \cdot C)$?

Упражнение 4.12. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $(A \cdot B) \setminus C \rightarrow A \setminus (B \setminus C)$?

Упражнение 4.13. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $(B \cdot A) \setminus C \rightarrow A \setminus (B \setminus C)$?

Упражнение 4.14. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $A \setminus (B \setminus C) \rightarrow (B \cdot A) \setminus C$?

Определение 4.15. Если $L \vdash A \rightarrow B$ и $L \vdash B \rightarrow A$, то пишем $A \leftrightarrow B$.

Упражнение 4.16. Верно ли, что $A \setminus (B \setminus C) \leftrightarrow (B \cdot A) \setminus C$?

Упражнение 4.17. Верно ли, что $A \setminus (B \setminus C) \leftrightarrow (A \setminus B) \setminus C$?

Упражнение 4.18. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $(A \setminus B) \cdot C \rightarrow A \setminus (B \cdot C)$?

Упражнение 4.19. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $A \setminus (B \cdot C) \rightarrow (A \setminus B) \cdot C$?

Упражнение 4.20. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $A \setminus (B \setminus C) \rightarrow (A \setminus B) \setminus C$?

Упражнение 4.21. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $A \rightarrow B \setminus (A \setminus B)$?

Упражнение 4.22. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $B \setminus (A \setminus B) \rightarrow A$?

Упражнение 4.23. Всегда ли верно, что $A \cdot (A \setminus (A \cdot B)) \leftrightarrow A \cdot B$?

Упражнение 4.24. Верно ли, что $L \vdash p_1/p_1, p_1, p_1 \setminus p_1 \rightarrow p_1$?

Упражнение 4.25. Верно ли, что $L \vdash p_1/p_1, p_2, p_2 \setminus p_1 \rightarrow p_1$?

Упражнение 4.26. Верно ли, что $L \vdash p_1/p_3, p_3, p_1 \setminus p_1 \rightarrow p_1$?

Упражнение 4.27. Верно ли, что $L \vdash p_1/p_1, p_1, p_1 \setminus p_2 \rightarrow p_2$?

Упражнение 4.28. Верно ли, что $L \vdash ((p_1/p_1) \setminus p_1) \setminus p_1 \rightarrow p_1 \setminus p_1$?

Упражнение 4.29. Верно ли, что $L \vdash p_1 / ((p_1/p_1) \setminus p_1) \rightarrow p_1/p_1$?

Упражнение 4.30. Верно ли, что $L \vdash ((p_2/p_1) \setminus p_2) \setminus p_3 \rightarrow p_1 \setminus p_3$?

Упражнение 4.31. Верно ли, что $L \vdash p_1 / ((p_4/p_3) \setminus p_4) \rightarrow p_1/p_3$?

Упражнение 4.32. Верно ли, что $L \vdash (p_2 / (p_4 \setminus p_2)) \setminus p_3 \rightarrow p_4 \setminus p_3$?

Упражнение 4.33. Верно ли, что $L \vdash p_2 / (p_1 / (p_3 \setminus p_1)) \rightarrow p_2/p_3$?

Упражнение 4.34. Верно ли, что $L \vdash p_1/p_2 \rightarrow (p_1 / (p_3 \setminus p_2)) \setminus p_3$?

Упражнение 4.35. Верно ли, что $L \vdash p_1 \setminus p_2 \rightarrow p_3 \setminus ((p_1/p_3) \setminus p_2)$?

Упражнение 4.36. Верно ли, что $L \vdash p_2/p_2 \rightarrow (p_2 / (p_2 \setminus p_2)) \setminus p_2$?

Упражнение 4.37. Верно ли, что $L \vdash p_3 \setminus p_3 \rightarrow p_3 \setminus ((p_3/p_3) \setminus p_3)$?

Упражнение 4.38. Верно ли, что $L \vdash p_3/p_3 \rightarrow p_3 / ((p_3/p_3) \setminus p_3)$?

Упражнение 4.39. Верно ли, что $L \vdash p_3 / ((p_3/p_3) \setminus p_3) \rightarrow p_3/p_3$?

Упражнение 4.40. Верно ли, что $L \vdash p_1 \setminus p_1 \rightarrow (p_1 / (p_1 \setminus p_1)) \setminus p_1$?

Упражнение 4.41. Верно ли, что $L \vdash (p_1 / (p_1 \setminus p_1)) \setminus p_1 \rightarrow p_1 \setminus p_1$?

Упражнение 4.42. Верно ли, что $L \vdash p_1 / (p_1 \cdot p_2), p_1, p_2, p_1 \setminus p_1 \rightarrow p_1$?

Упражнение 4.43. Верно ли, что $L \vdash p_1, p_1/p_1, p_2, p_2 \setminus p_1 \rightarrow p_1 \cdot p_1$?

Упражнение 4.44. Верно ли, что $L \vdash p_3, p_1/p_3, p_3, p_1 \setminus p_1 \rightarrow p_3 \cdot p_1$?

Упражнение 4.45. Верно ли, что $L \vdash p_1/p_1, p_1, p_1 \setminus (p_2 \cdot (p_2 \setminus p_2)) \rightarrow p_2$?

Упражнение 4.46. Верно ли, что $L \vdash ((p_1/p_1) \setminus p_1) \setminus p_1, p_2 \rightarrow p_1 \setminus (p_1 \cdot p_2)$?

Упражнение 4.47. Верно ли, что $L \vdash p_1, p_1 / ((p_1/p_1) \setminus p_1) \rightarrow (p_1 \cdot p_1) / p_1$?

- Упражнение 4.48.** Верно ли, что $L \vdash ((p_2/p_1) \setminus p_2) \setminus p_3 \rightarrow (p_1 \setminus p_1) \setminus (p_1 \setminus p_3)$?
- Упражнение 4.49.** Верно ли, что $L \vdash p_2, p_1 / ((p_4/p_3) \setminus p_4) \rightarrow p_2 \cdot (p_1/p_3)$?
- Упражнение 4.50.** Верно ли, что $L \vdash (p_2 / (p_1 \setminus (p_4 \setminus p_2))) \setminus p_3 \rightarrow (p_4 \cdot p_1) \setminus p_3$?
- Упражнение 4.51.** Верно ли, что $L \vdash p_2 / ((p_1 / (p_1 \setminus p_1)) / (p_3 \setminus p_1)) \rightarrow p_2 / p_3$?
- Упражнение 4.52.** Верно ли, что $L \vdash p_1, p_1/p_2 \rightarrow ((p_1 \cdot p_1) / (p_3 \setminus p_2)) / p_3$?
- Упражнение 4.53.** Верно ли, что $L \vdash p_1 \setminus (p_1 \cdot p_2) \rightarrow p_3 \setminus ((p_1/p_3) \setminus (p_1 \cdot p_2))$?
- Упражнение 4.54.** Верно ли, что $L \vdash p_1, p_2/p_2 \rightarrow (p_1 \cdot (p_2 / (p_2 \setminus p_2))) / p_2$?
- Упражнение 4.55.** Верно ли, что $L \vdash p_3 \setminus p_3, p_3 \rightarrow (p_3 \setminus ((p_3/p_3) \setminus p_3)) \cdot p_3$?
- Упражнение 4.56.** Верно ли, что $L \vdash p_3/p_3, p_2 \rightarrow (p_3 / ((p_3/p_3) \setminus p_3)) \cdot p_2$?
- Упражнение 4.57.** Верно ли, что $L \vdash p_1, p_3 / ((p_3/p_3) \setminus p_3) \rightarrow (p_1 \cdot p_3) / p_3$?
- Упражнение 4.58.** Верно ли, что $L \vdash (p_1 \setminus p_1) \cdot p_2 \rightarrow (p_1 / (p_1 \setminus p_1)) \setminus (p_1 \cdot p_2)$?
- Упражнение 4.59.** Верно ли, что $L \vdash ((p_1 / (p_1 \setminus p_1)) \setminus p_1) \cdot p_3 \rightarrow p_1 \setminus (p_1 \cdot p_3)$?
- Упражнение 4.60.** Следует ли из $L \vdash A \rightarrow B$ и $L \vdash B \rightarrow C$, что $L \vdash A / ((B/p_1) \setminus C) \rightarrow (A / (B/p_1)) \setminus C$?

4.4 Обратимость правил $(\rightarrow \setminus)$, $(\rightarrow /)$ и $(\cdot \rightarrow)$

Лемма 4.61. Если $L \vdash \Pi \rightarrow A \setminus B$, то $L \vdash A, \Pi \rightarrow B$.

Доказательство.

$$\frac{\Pi \rightarrow A \setminus B \quad \frac{A \rightarrow A \quad B \rightarrow B}{A, (A \setminus B) \rightarrow B} (\setminus \rightarrow)}{A, \Pi \rightarrow B} (\text{cut}).$$

□

Лемма 4.62. Если $L \vdash \Pi \rightarrow B/A$, то $L \vdash \Pi, A \rightarrow B$.

Доказательство.

$$\frac{\Pi \rightarrow B/A \quad \frac{A \rightarrow A \quad B \rightarrow B}{(B/A), A \rightarrow B} (/ \rightarrow)}{\Pi, A \rightarrow B} (\text{cut}).$$

□

Лемма 4.63. Если $L \vdash \Gamma, (A \cdot B), \Delta \rightarrow C$, то $L \vdash \Gamma, A, B, \Delta \rightarrow C$.

Доказательство.

$$\frac{\frac{A \rightarrow A \quad B \rightarrow B}{A, B \rightarrow A \cdot B} (\rightarrow \cdot) \quad \Gamma, (A \cdot B), \Delta \rightarrow C}{\Gamma, A, B, \Delta \rightarrow C} (\text{cut}).$$

□

4.5 Двойственность

Определение 4.64. Определим отображение dual: $\text{Tr} \rightarrow \text{Tr}$.

$$\begin{aligned} \text{dual}(p_i) &= p_i \\ \text{dual}(A \cdot B) &= \text{dual}(B) \cdot \text{dual}(A) \\ \text{dual}(A \setminus B) &= \text{dual}(B) / \text{dual}(A) \\ \text{dual}(A/B) &= \text{dual}(B) \setminus \text{dual}(A) \end{aligned}$$

Упражнение 4.65. Вычислить $\text{dual}(p_1/p_2)$.

Упражнение 4.66. Вычислить $\text{dual}(p_4 \cdot (p_1 \setminus p_1))$.

Упражнение 4.67. Всегда ли верно $\text{dual}(\text{dual}(A)) = A$?

Лемма 4.68. Если $L \vdash \Gamma \rightarrow A$, то $L \vdash \text{dual}(\Gamma) \rightarrow \text{dual}(A)$.

Доказательство. Заменяем в выводе каждую секвенцию $\Phi \rightarrow B$ на $\text{dual}(\Phi) \rightarrow \text{dual}(B)$. □

Упражнение 4.69. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $C / (A \cdot B) \rightarrow (C/B) / A$?

Упражнение 4.70. Всегда ли в исчислении Ламбека выводима секвенция $A \rightarrow (B/A) \setminus B$?

4.6 Несколько допустимых правил

Лемма 4.71.

1. Если $L \vdash A \rightarrow B$, то $L \vdash A \cdot C \rightarrow B \cdot C$.
2. Если $L \vdash A \rightarrow B$, то $L \vdash C \cdot A \rightarrow C \cdot B$.
3. Если $L \vdash A \rightarrow B$, то $L \vdash A/C \rightarrow B/C$.
4. Если $L \vdash A \rightarrow B$, то $L \vdash C \setminus A \rightarrow C \setminus B$.
5. Если $L \vdash A \rightarrow B$, то $L \vdash C/B \rightarrow C/A$.
6. Если $L \vdash A \rightarrow B$, то $L \vdash B \setminus C \rightarrow A \setminus C$.

Упражнение 4.72. Всегда ли верно, что $B/((B/A) \setminus B) \leftrightarrow B/A$?

Упражнение 4.73. Существуют ли такие типы A , B и C , что $L \vdash A/(B \setminus C) \rightarrow (A/B) \setminus C$?

Упражнение 4.74. Допустимо ли правило “если $L \vdash C \cdot A \rightarrow C \cdot B$, то $L \vdash A \rightarrow B$ ”?

Упражнение 4.75. Верно ли, что $L \vdash ((p_1/p_2) \setminus p_1) \setminus p_3 \rightarrow (p_1 \setminus p_2) \setminus (p_1 \setminus p_3)$?

Упражнение 4.76. Верно ли, что $L \vdash ((p_1/p_2) \setminus p_1) \setminus p_3 \rightarrow (p_1 \setminus p_1) \setminus (p_2 \setminus p_3)$?

5 Грамматики Ламбека без семантической составляющей

5.1 Определение

Определение 5.1. Грамматика Ламбека есть тройка $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$, где Σ — некоторое конечное множество (алфавит), H — тип исчисления Ламбека и $\triangleright$ — некоторое конечное бинарное отношение $\triangleright \subset \text{Tr} \times \Sigma$.

Определение 5.2. Язык, порождаемый грамматикой Ламбека $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$, определяется как множество всех непустых слов $t_1 \dots t_n$ в алфавите Σ , для которых существует такая выводимая в исчислении Ламбека секвенция $B_1, \dots, B_n \rightarrow H$, что для любого $i \leq n$ выполняется $B_i \triangleright t_i$. Обозначим этот язык через $\mathcal{L}_L(\Sigma, H, \triangleright)$.

5.2 Грамматика Ламбека для фрагмента английского языка

[3], [20, с. 125–137]

Пример 5.3.

$$\begin{aligned}
 np &\triangleright John \\
 np &\triangleright Mary \\
 (np \setminus s) / np &\triangleright likes \\
 (s \setminus s) / s &\triangleright or \\
 (np \setminus np) / np &\triangleright or \\
 np \setminus s &\triangleright works \\
 np / np &\triangleright poor \\
 s \setminus s &\triangleright here \\
 (np \setminus s) / (np \setminus s) &\triangleright never \\
 (s \setminus s) / np &\triangleright for
 \end{aligned}$$

Упражнение 5.4. Соответствует ли приведённой грамматике фраза “John never likes Mary”?

5.3 Математические примеры грамматик Ламбека

Упражнение 5.5. Рассмотрим грамматику $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$, где $\Sigma = \{a, b, c\}$, $H = p_1$, $p_2/p_1 \triangleright a$, $p_2 \setminus p_1 \triangleright b$, $p_1 \triangleright c$. Является ли бесконечным язык $\mathcal{L}_L(\Sigma, H, \triangleright)$?

Упражнение 5.6. Найти грамматику Ламбека для языка a^*b .

Упражнение 5.7. Найти грамматику Ламбека для языка $a(bc)^*$.

Упражнение 5.8. Найти порождающую грамматику, эквивалентную грамматике Ламбека $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$, где $\Sigma = \{a, b\}$, $H = p_1 \setminus p_1$, $p_1 \triangleright a$, $(p_1 \cdot p_1) \setminus p_1 \triangleright b$.

Упражнение 5.9. Найти порождающую грамматику, эквивалентную грамматике Ламбека $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$, где $\Sigma = \{a, b\}$, $H = np$, $(np/n) \triangleright a$, $(np/n) \triangleright the$, $(n/n) \triangleright green$, $(n/n) \triangleright furious$, $n \triangleright table$, $n \triangleright idea$.

6 Модели исчисления Ламбека

6.1 Полугруппы, моноиды и группы

Определение 6.1. Группоид — $\langle M, * \rangle$, где M — непустое множество и $*$: $M \times M \rightarrow M$.

Определение 6.2. Полугруппа — группоид $\langle M, * \rangle$, где операция $*$ ассоциативна (т. е. $(\forall a, b, c \in M) (a * b) * c = a * (b * c)$).

Упражнение 6.3. Является ли полугруппой $\langle \mathbb{R}, * \rangle$, где $x * y \Rightarrow 2xy$?

Упражнение 6.4. Является ли полугруппой $\langle \mathbb{R}, * \rangle$, где $x * y \Rightarrow \frac{xy}{3}$?

Упражнение 6.5. Является ли полугруппой $\langle \mathbb{R}, * \rangle$, где $x * y \Rightarrow \frac{5}{xy}$?

Определение 6.6. Единицей в полугруппе $\langle M, * \rangle$ называется такой элемент e , что $(\forall a \in M) e * a = a = a * e$.

Определение 6.7. Моноид — $\langle M, *, e \rangle$, где $\langle M, * \rangle$ — полугруппа и e — единица в этой полугруппе.

Определение 6.8. Группа — $\langle M, *, e, ()^{-1} \rangle$, где $\langle M, *, e \rangle$ — моноид, $()^{-1}: M \rightarrow M$ и $(\forall a \in M) a^{-1} * a = e = a * a^{-1}$.

Упражнение 6.9. Является ли полугруппой $\langle \Sigma^+, \circ \rangle$?

Определение 6.10. Свободная полугруппа — $\langle \Sigma^+, \circ \rangle$.

Упражнение 6.11. Является ли полугруппой $\langle \Sigma^*, \circ \rangle$?

Определение 6.12. Свободный моноид — $\langle \Sigma^*, \circ, \varepsilon \rangle$.

Упражнение 6.13. Является ли полугруппой $\langle \mathbb{R}, * \rangle$, где $x * y \Rightarrow \frac{xy}{3}$?

Упражнение 6.14. Является ли полугруппой $\langle \mathbb{R}, * \rangle$, где $x * y \Rightarrow \frac{5}{xy}$?

Упражнение 6.15. Является ли полугруппой $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, * \rangle$, где $\langle a, b \rangle * \langle c, d \rangle \Rightarrow \langle ac - bd, ad + bc \rangle$?

Упражнение 6.16. Является ли полугруппой $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, * \rangle$, где $\langle a, b \rangle * \langle c, d \rangle \Rightarrow \langle ac - bd, ad - bc \rangle$?

Ответ 6.16. Нет.

$$\begin{aligned} \langle 0, 1 \rangle * \langle 1, 0 \rangle &= \langle 0, -1 \rangle \\ \langle 0, -1 \rangle * \langle 0, 1 \rangle &= \langle 1, 0 \rangle \\ (\langle 0, 1 \rangle * \langle 1, 0 \rangle) * \langle 0, 1 \rangle &= \langle 1, 0 \rangle \\ \langle 1, 0 \rangle * \langle 0, 1 \rangle &= \langle 0, 1 \rangle \\ \langle 0, 1 \rangle * \langle 0, 1 \rangle &= \langle -1, 0 \rangle \\ \langle 0, 1 \rangle * (\langle 1, 0 \rangle * \langle 0, 1 \rangle) &= \langle -1, 0 \rangle \end{aligned}$$

Упражнение 6.17. Является ли полугруппой $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, * \rangle$, где $\langle a, b \rangle * \langle c, d \rangle \Rightarrow \langle ac + bd, ad + bc \rangle$?

Упражнение 6.18. Является ли полугруппой $\langle \mathbb{Q}, * \rangle$, где $a * b \Rightarrow a$?

6.2 Умножение и деление формальных языков

Определение 6.19. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \Sigma^+$.

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \Rightarrow \{u \circ v \mid u \in \mathcal{A}, v \in \mathcal{B}\}$$

Упражнение 6.20. Вычислить $\{a^n b^m \mid m \geq n \geq 1\} \cdot \{b^k \mid k \geq 1\}$.

Упражнение 6.21. Вычислить $\{a^n b^m \mid m \geq n \geq 1\} \cdot \{a^k \mid k \geq 1\}$.

Упражнение 6.22. Вычислить $\mathcal{A} \cdot \emptyset$.

Определение 6.23. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \Sigma^+$.

$$\mathcal{A} \backslash \mathcal{B} \Rightarrow \{v \in \Sigma^+ \mid (\forall u \in \mathcal{A}) u \circ v \in \mathcal{B}\}$$

Определение 6.24. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \Sigma^+$.

$$\mathcal{B} / \mathcal{A} \Rightarrow \{v \in \Sigma^+ \mid (\forall u \in \mathcal{A}) v \circ u \in \mathcal{B}\}$$

- Упражнение 6.25.** Пусть $\Sigma = \{a, b\}$. Вычислить $\{ba, baa, bba, bbaa\}/\{a, aa\}$.
Упражнение 6.26. Пусть $\Sigma = \{a, b\}$. Вычислить $\{ba, baa, bba, bbaa, bbbaa\}/\{a, aa\}$.
Упражнение 6.27. Пусть $\Sigma = \{a, b\}$. Вычислить $\{b, bb\} \setminus \{ba, baa, bba, bbaa, bbbaa\}$.
Упражнение 6.28. Пусть $\Sigma = \{a, b\}$. Вычислить $\{aa, aba, abba\}/\{a, ba\}$.
Упражнение 6.29. Пусть $\Sigma = \{a, b\}$. Вычислить $\{aa, aba, abba\}/\{a, ab\}$.
Упражнение 6.30. Пусть $\Sigma = \{a, b\}$. Вычислить $\{aa, aba, abba\}/\emptyset$.
Упражнение 6.31. Всегда ли верно $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$?
Упражнение 6.32. Всегда ли верно $(B/A) \cdot A \subseteq B$?
Упражнение 6.33. Всегда ли верно $B \subseteq (B/A) \cdot A$?
Упражнение 6.34. Всегда ли верно $(A \setminus B) \cdot A \subseteq B$?
Упражнение 6.35. Всегда ли верно $(B/A) \setminus B \subseteq A$?
Упражнение 6.36. Всегда ли верно $B \subseteq (A \setminus A) \setminus B$?
Упражнение 6.37. Всегда ли верно $A \subseteq (A/(A/A))/(A/A)$?

6.3 Свойства умножения и деления формальных языков

Лемма 6.38. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Лемма 6.39.

1. Если $A_1 \subseteq A_2$, то $A_1 \cdot B \subseteq A_2 \cdot B$.
2. Если $B_1 \subseteq B_2$, то $A \cdot B_1 \subseteq A \cdot B_2$.

Лемма 6.40. Если $A_1 \subseteq A_2$ и $B_1 \subseteq B_2$, то $A_1 \cdot B_1 \subseteq A_2 \cdot B_2$.

Лемма 6.41.

1. $C \subseteq B/A$ тогда и только тогда, когда $C \cdot A \subseteq B$.
2. $C \subseteq A \setminus B$ тогда и только тогда, когда $A \cdot C \subseteq B$.

Доказательство.

$$C \subseteq B/A \iff C \subseteq \{v \in \Sigma^+ \mid (\forall u \in A) u \circ v \in B\} \iff (\forall v \in C) (\forall u \in A) u \circ v \in B \iff C \cdot A \subseteq B$$

□

Лемма 6.42.

1. $(B/A) \cdot A \subseteq B$
2. $A \cdot (A \setminus B) \subseteq B$

Доказательство. По лемме 6.41 из $B/A \subseteq B/A$ следует, что $(B/A) \cdot A \subseteq B$. □

Лемма 6.43. Если $B_1 \subseteq B_2$, то $B_1/A \subseteq B_2/A$ и $A \setminus B_1 \subseteq A \setminus B_2$.

Лемма 6.44. Если $A_1 \subseteq A_2$, то $B/A_1 \subseteq B/A_2$ и $A_2 \setminus B \subseteq A_1 \setminus B$.

Лемма 6.45. $(A \setminus B)/C = A \setminus (B/C)$

Лемма 6.46.

1. $A \subseteq B/(A \setminus B)$
2. $A \subseteq (B/A) \setminus B$

6.4 Определение языковой модели

Определение 6.47. L-модель (языковая модель) — $\langle \Sigma, v \rangle$, где Σ — произвольное непустое множество, $v: \text{Pr} \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^+)$.

Для данной L-модели определим функции $\bar{v}: \text{Tr} \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^+)$ и $\vec{v}: \text{Tr}^+ \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^+)$ следующим образом.

$$\begin{aligned} \bar{v}(p_i) &= v(p_i) \\ \bar{v}(A \cdot B) &= \bar{v}(A) \cdot \bar{v}(B) \\ \bar{v}(A \setminus B) &= \bar{v}(A) \setminus \bar{v}(B) \\ \bar{v}(A/B) &= \bar{v}(A)/\bar{v}(B) \\ \vec{v}(A_1, \dots, A_n) &= \bar{v}(A_1) \cdot \dots \cdot \bar{v}(A_n) \end{aligned}$$

Упражнение 6.48. Обозначим $s \Rightarrow p_1$, $np \Rightarrow p_2$. Найти $\bar{v}(np \setminus s)$, если $\Sigma = \{j, m, l\}$, $v(s) = \{jlm, mlm, jlj, mlj\}$, $v(np) = \{j, m\}$.

Вместо $\bar{v}$ и $\vec{v}$ будем писать просто v .

Упражнение 6.49. Найти $v(np \setminus s)$, если $\Sigma = \{j, m, h, l\}$, $v(s) = \{jlm, mlm, hlm, jlj, mlj, hlj\}$, $v(np) = \{j, m\}$.

Упражнение 6.50. Найти $v(np \setminus s)$, если $\Sigma = \{j, m, h, l\}$, $v(s) = \{jlm, hlm, mlj, mlm\}$, $v(np) = \{j, m\}$.

Упражнение 6.51. Найти $v(s/(np \setminus s))$, если $\Sigma = \{j, m, h, l\}$, $v(s) = \{jlm, mlm, hlm, jlj, mlj, hlj\}$, $v(np) = \{j, m\}$.

Определение 6.52. Секвенция $\Gamma \rightarrow A$ является *истинной* в L-модели $\langle \Sigma, v \rangle$, если $v(\Gamma) \subseteq v(A)$.

Упражнение 6.53. Истинна ли секвенция $s/(np \setminus s) \rightarrow np$ в модели $\langle \Sigma, v \rangle$, если $\Sigma = \{j, m, l\}$, $v(s) = \{jlj, jlm, mlj, mlm\}$, $v(np) = \{j, m\}$?

Упражнение 6.54. Истинна ли секвенция $s/(np \setminus s) \rightarrow np$ в модели $\langle \Sigma, v \rangle$, если $\Sigma = \{j, m, h, l\}$, $v(s) = \{jlm, mlm, hlm, jlj, mlj, hlj\}$, $v(np) = \{j, m\}$?

Упражнение 6.55. Истинна ли секвенция $(s/np) \setminus s \rightarrow np$ в модели $\langle \Sigma, v \rangle$, если $\Sigma = \{j, m, h, l\}$, $v(s) = \{jlm, mlm, hlm, jlj, mlj, hlj\}$, $v(np) = \{j, m\}$?

6.5 Корректность исчисления Ламбека

Теорема 6.56 (О корректности). Если $L \vdash \Gamma \rightarrow A$, то секвенция $\Gamma \rightarrow A$ истинна в каждой L-модели.

Пусть $\langle \Sigma, v \rangle$ — неоторая L-модель. Продолжим функцию v на множество Tr^* , положив $v(\Delta) = \{\varepsilon\}$.

Лемма 6.57. Для любых последовательностей $\Gamma \in \text{Tr}^*$ и $\Delta \in \text{Tr}^*$ имеет место равенство $v(\Gamma) \cdot v(\Delta) = v(\Gamma, \Delta)$.

Доказательство теоремы 6.56. Индукция по длине вывода. □

6.6 Полнота исчисления Ламбека

Теорема 6.58 (о полноте, без доказательства). Если секвенция $\Gamma \rightarrow A$ истинна в каждой L-модели, то $L \vdash \Gamma \rightarrow A$.

6.7 Каноническая модель исчисления $L(\setminus, /)$

Определение 6.59. Обозначим через $\text{Tr}(\setminus, /)$ множество всех типов, не содержащих операцию $\cdot$.

Определение 6.60. Исчислением Ламбека без умножения (обозначение — $L(\setminus, /)$) называется результат исключения операции $\cdot$ из исчисления L.

Лемма 6.61. Пусть $\Gamma \in \text{Tr}(\setminus, /)^+$ и $A \in \text{Tr}(\setminus, /)$. Тогда утверждения $L \vdash \Gamma \rightarrow A$ и $L(\setminus, /) \vdash \Gamma \rightarrow A$ равносильны.

Доказательство. Следует из устранимости сечения. □

Определение 6.62. Канонической моделью исчисления $L(\setminus, /)$ называется L-модель $\langle \Sigma, v \rangle$, где $\Sigma = \text{Tr}(\setminus, /)$ и $u(p_i) = \{\Gamma \in \text{Tr}(\setminus, /)^+ \mid L \vdash \Gamma \rightarrow p_i\}$.

Лемма 6.63. Пусть $\Gamma \in \text{Tr}(\setminus, /)^+$ и $A \in \text{Tr}(\setminus, /)$. Тогда утверждения $\Gamma \in u(A)$ и $L \vdash \Gamma \rightarrow A$ равносильны.

Доказательство. Индукция по длине типа A. □

Лемма 6.64. Для любого типа $A \in \text{Tr}(\setminus, /)$ имеет место включение $A \in u(A)$.

6.8 Доказательство полноты исчисления $L(\backslash, /)$

Теорема 6.65. Если $A \in \text{Tr}(\backslash, /)$, $\Gamma \in \text{Tr}(\backslash, /)^+$ и секвенция $\Gamma \rightarrow A$ истинна в каждой L -модели, то $L(\backslash, /) \vdash \Gamma \rightarrow A$.

Доказательство. Пусть секвенция $B_1, \dots, B_n \rightarrow A$ истинна в каждой L -модели, $A \in \text{Tr}(\backslash, /)$ и $B_i \in \text{Tr}(\backslash, /)$ для каждого $i \leq n$. Тогда секвенция $B_1, \dots, B_n \rightarrow A$ истинна в канонической модели, т. е., $u(B_1) \cdot \dots \cdot u(B_n) \subseteq u(A)$. По предыдущей лемме $B_1, \dots, B_n \in u(B_1) \cdot \dots \cdot u(B_n) \subseteq u(A)$. В силу леммы 6.63 $L(\backslash, /) \vdash B_1, \dots, B_n \rightarrow A$. $\square$

7 Алгебраические инварианты в исчислении Ламбека

7.1 Счётчики

Определение 7.1. Для каждого $p_i \in \text{Pr}$ определим функцию $\#_{p_i}: \text{Tr} \rightarrow \mathbb{Z}$, положив

$$\begin{aligned} \#_{p_i}(p_i) &\equiv 1, \\ \#_{p_i}(p_j) &\equiv 0, \text{ если } i \neq j, \\ \#_{p_i}(A \cdot B) &\equiv \#_{p_i}(A) + \#_{p_i}(B), \\ \#_{p_i}(A \backslash B) &\equiv \#_{p_i}(B) - \#_{p_i}(A), \\ \#_{p_i}(B / A) &\equiv \#_{p_i}(B) - \#_{p_i}(A). \end{aligned}$$

Упражнение 7.2. Вычислить $\#_n(n \backslash np)$, где $n, np \in \text{Pr}$.

Упражнение 7.3. Вычислить $\#_n(((n \backslash np) \backslash s) \cdot np)$.

Упражнение 7.4. Вычислить $\#_{np}(((n \backslash np) \backslash s) \cdot np)$.

Упражнение 7.5. Вычислить $\#_s(((n \backslash np) \backslash s) \cdot np)$.

Определение 7.6. $\#_{p_i}(A_1, \dots, A_n) \equiv \#_{p_i}(A_1) + \dots + \#_{p_i}(A_n)$.

Теорема 7.7. Если $L \vdash \Gamma \rightarrow A$, то $\#_{p_i} \Gamma = \#_{p_i} A$ для каждого $p_i \in \text{Pr}$.

Упражнение 7.8. Проверить теорему 7.7 на примере секвенции $s / (np \backslash s), (np \backslash s) / np, (s / np) \backslash s \rightarrow s$.

Упражнение 7.9. Пусть $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$ — грамматика из упражнения 5.5. Пусть $w \in \mathcal{L}_L(\Sigma, H, \triangleright)$.

Доказать, что тогда $|w|_a = |w|_b$.

Упражнение 7.10. Пусть $\langle \Sigma, H, \triangleright \rangle$ — грамматика из упражнения 5.5. Пусть $w \in \mathcal{L}_L(\Sigma, H, \triangleright)$.

Доказать, что тогда $|w|_c = 1$.

Упражнение 7.11. Найти такую секвенцию $\Gamma \rightarrow A$, что $\#_{p_i} \Gamma = \#_{p_i} A$ для каждого $p_i \in \text{Pr}$, но $L \not\vdash \Gamma \rightarrow A$.

7.2 Определение свободной группы

Под свободной группой будем понимать следующую конкретную ее реализацию. Рассмотрим расширенный алфавит Pr' , полученный из множества Pr добавлением для каждого $p_i \in \text{Pr}$ новой буквы p_i^{-1} . В этом расширенном алфавите будем рассматривать приведенные слова. Слово u в алфавите Pr' называется *приведенным*, если в нем нет букв p_i и p_i^{-1} , стоящих рядом. Пустое слово также рассматривается как приведенное слово. Элементы FG — все приведенные слова.

Определим умножение на этом множестве рекурсивно по длине слов.

- Если $u = u' p_i$ и $v = p_i^{-1} v'$ для некоторого индекса i , то $u \cdot v \equiv u' \cdot v'$.
- Если $u = u' p_i^{-1}$ и $v = p_i v'$ для некоторого индекса i , то $u \cdot v \equiv u' \cdot v'$.
- Иначе $u \cdot v$ получается обычным приписыванием слов.

Очевидно, что произведение приведенных слов является приведенным.

Упражнение 7.12. Вычислить $p_1 p_2 \cdot p_2^{-1} p_3 p_2^{-1} \cdot p_2 p_3^{-1} p_1^{-1} \cdot p_1$.

Упражнение 7.13. Вычислить $p_1 p_2^{-1} \cdot p_1^{-1}$.

Единицей свободной группы FG является пустое слово ϵ .

Определим операцию взятия обратного рекурсивно по длине слова так:

$$\begin{aligned}(\varepsilon)^{-1} &\equiv \varepsilon, \\(up_i)^{-1} &\equiv p_i^{-1}(u)^{-1}, \\(up_i^{-1})^{-1} &\equiv p_i(u)^{-1}.\end{aligned}$$

Упражнение 7.14. Вычислить $(p_3p_2p_2)^{-1}$.

Упражнение 7.15. Вычислить $p_3p_2p_2 \cdot p_2^{-1}p_2^{-1}p_3^{-1}$.

7.3 Интерпретация исчисления Ламбека в свободной группе

Определение 7.16. Определим функцию $\llbracket \cdot \rrbracket: \text{Tr} \rightarrow FG$, положив

$$\begin{aligned}\llbracket p_i \rrbracket &\equiv p_i, \\ \llbracket A \cdot B \rrbracket &\equiv \llbracket A \rrbracket \cdot \llbracket B \rrbracket, \\ \llbracket A \setminus B \rrbracket &\equiv \llbracket A \rrbracket^{-1} \cdot \llbracket B \rrbracket, \\ \llbracket B / A \rrbracket &\equiv \llbracket B \rrbracket \cdot \llbracket A \rrbracket^{-1}.\end{aligned}$$

Упражнение 7.17. Вычислить $\llbracket np \setminus s \rrbracket$.

Упражнение 7.18. Вычислить $\llbracket (np \setminus s) / np \rrbracket$.

Упражнение 7.19. Вычислить $\llbracket np / n \rrbracket$.

Упражнение 7.20. Вычислить $\llbracket ((p_1 / p_2) \setminus p_1) \setminus p_3 \rrbracket$.

Упражнение 7.21. Вычислить $\llbracket (p_1 \setminus p_2) \setminus (p_1 \setminus p_3) \rrbracket$.

Определение 7.22. $\llbracket A_1, \dots, A_n \rrbracket \equiv \llbracket A_1 \rrbracket \cdot \dots \cdot \llbracket A_n \rrbracket$.

Упражнение 7.23. Вычислить $\llbracket ((np \setminus s) / np), (np / n), n \rrbracket$.

Теорема 7.24. Если $L \vdash \Gamma \rightarrow A$, то $\llbracket \Gamma \rrbracket = \llbracket A \rrbracket$.

Упражнение 7.25. Верно ли, что $L \vdash np \cdot n \rightarrow ((s / np) / n) \setminus s$?

Упражнение 7.26. Верно ли, что $L \vdash (s / np) \setminus s \rightarrow np$?

Упражнение 7.27. Верно ли, что $L \vdash ((p_1 \setminus p_2) / p_1) / p_3 \rightarrow ((p_1 \setminus p_2) / p_3) / p_1$?

Упражнение 7.28. Верно ли, что

$$L \vdash p_1, p_1 \setminus p_1, p_1 / p_1, p_1 \setminus p_1, ((p_2 / p_1) \setminus p_2) \setminus (p_3 / p_1), (p_3 / p_1) \setminus (p_3 / p_1), \rightarrow ((p_2 / p_1) / (p_1 \setminus p_3)) \setminus p_2?$$

Упражнение 7.29. Найти такую секвенцию $\Gamma \rightarrow A$, что $\llbracket \Gamma \rrbracket = \llbracket A \rrbracket$, но $L \not\vdash \Gamma \rightarrow A$.

Упражнение 7.30. Найти такие типы A и B , что $\llbracket A \rrbracket = \llbracket B \rrbracket$, $L \not\vdash A \rightarrow B$ и $L \not\vdash B \rightarrow A$.

Упражнение 7.31. Вычислить $\llbracket s / (np \setminus s) \rrbracket$.

Упражнение 7.32. Вычислить $\llbracket (s / np) \setminus s \rrbracket$.

Теорема 7.33. Следующие три утверждения равносильны:

- 1) $\llbracket A \rrbracket = \llbracket B \rrbracket$;
- 2) найдется такой тип C , что $L \vdash A \rightarrow C$ и $L \vdash B \rightarrow C$;
- 3) найдется такой тип D , что $L \vdash D \rightarrow A$ и $L \vdash D \rightarrow B$.

Упражнение 7.34. Найти такой тип C , что $((np \setminus s) / np) \cdot ((s / np) \setminus s) \rightarrow C$ и $((np \setminus s) / np) / np \cdot np \cdot (np / n) \cdot n \rightarrow C$.

Упражнение 7.35. Найти такой тип C , что $s / (np \setminus s) \rightarrow C$ и $(s / np) \setminus s \rightarrow C$.

Упражнение 7.36. Найти такой тип C , что $p_2 \cdot p_3 \cdot (p_3 \setminus p_4) \rightarrow C$ и $p_1 \cdot (p_1 \setminus p_2) \cdot p_4 \rightarrow C$.

Упражнение 7.37. Найти такой тип D , что $D \rightarrow p_2 \cdot p_3 \cdot (p_3 \setminus p_4)$ и $D \rightarrow p_1 \cdot (p_1 \setminus p_2) \cdot p_4$.

Упражнение 7.38. Найти такой тип D , что $D \rightarrow p_1 \cdot (p_1 \setminus p_1)$ и $D \rightarrow (p_1 / p_1) \cdot p_1$.

Доказательство $3 \rightarrow 2$ из теоремы 7.33. Положим $C \equiv (D / A) \setminus D / (B \setminus D)$. □

Доказательство $2 \rightarrow 3$ из теоремы 7.33. Положим $D \equiv (A / C) \cdot C \cdot (C \setminus B)$. □

8 Моделирование лингвистических явлений

8.1 Союзы

[7, 6.1]

Определение 8.1. Определим индуктивно множество **BoolTyp**.

1. **Bool** $\in$ **BoolTyp**.
2. Если $\sigma \in \mathbf{Typ}$ и $\tau \in \mathbf{BoolTyp}$, то $(\sigma \rightarrow \tau) \in \mathbf{BoolTyp}$.

Замечание 8.2. Очевидно, **BoolTyp** $\subseteq$ **Typ**.

Пример 8.3. Очевидно, **Ind** $\rightarrow$ **Ind** $\rightarrow$ **Bool** $\in$ **BoolTyp** и $(\mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Ind}) \rightarrow \mathbf{Bool} \in \mathbf{BoolTyp}$, но $(\mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Bool}) \rightarrow \mathbf{Ind} \notin \mathbf{BoolTyp}$.

Определение 8.4. *Полиморфным сочинительным комбинатором* (polymorphic coordination combinator) называется семейство лямбда-термов **Coor** $_{\rho}$, определённых для каждого $\rho \in \mathbf{BoolTyp}$ следующим образом.

1. **Coor****Bool** $\Rightarrow \lambda u. \lambda v_1. \lambda v_2. u(v_1)(v_2)$, где $u \in \mathbf{Var}_{\mathbf{Bool} \rightarrow \mathbf{Bool} \rightarrow \mathbf{Bool}}$, $v_1 \in \mathbf{Var}_{\mathbf{Bool}}$, $v_2 \in \mathbf{Var}_{\mathbf{Bool}}$.
2. Если $\sigma \in \mathbf{Typ}$ и $\tau \in \mathbf{BoolTyp}$, то **Coor** $_{\sigma \rightarrow \tau} \Rightarrow \lambda u. \lambda v_1. \lambda v_2. \lambda w. \mathbf{Coor}_{\tau}(u)(v_1(w))(v_2(w))$, где $u \in \mathbf{Var}_{\mathbf{Bool} \rightarrow \mathbf{Bool} \rightarrow \mathbf{Bool}}$, $v_1 \in \mathbf{Var}_{\sigma \rightarrow \tau}$, $v_2 \in \mathbf{Var}_{\sigma \rightarrow \tau}$, $w \in \mathbf{Var}_{\sigma}$.

Пример 8.5. Согласно определению **Coor****Ind** $\rightarrow$ **Bool** $= \lambda u. \lambda v_1. \lambda v_2. \lambda w. (\lambda u. \lambda v_1. \lambda v_2. (u(v_1)(v_2))(u(v_1(w))(v_2(w))))$.

Можно доказать, что **Coor****Ind** $\rightarrow$ **Bool** $\Rightarrow \lambda u. \lambda v_1. \lambda v_2. \lambda w. u(v_1(w))(v_2(w))$.

Пример 8.6. Можно доказать, что **Coor****Ind** $\rightarrow$ **Ind** $\rightarrow$ **Bool** $\Rightarrow \lambda u. \lambda v_1. \lambda v_2. \lambda w. \lambda z. u(v_1(w)(z))(v_2(w)(z))$.

Лемма 8.7. Для каждого $\rho \in \mathbf{BoolTyp}$ имеет место включение

$$\mathbf{Coor}_{\rho} \in \mathbf{Term}_{(\mathbf{Bool} \rightarrow \mathbf{Bool} \rightarrow \mathbf{Bool}) \rightarrow \rho \rightarrow \rho \rightarrow \rho}.$$

Пример 8.8. Для анализа сочинительного союза *or* добавим в категориальный словарь **Lex** записи *or* $\Rightarrow$ **Coor****Type(A)**(**OR**) : $A \setminus (A/A)$ для каждой категории A , удовлетворяющей условию **Type(A)** $\in$ **BoolTyp**.

При этом мы отказываемся от сформулированного в определении 3.12 требования конечности множества **Lex**. Но это не значит, что разрешены любые бесконечные категориальные словари. При новом подходе множество **Lex** должно состоять из конечного числа “обычных” элементов и конечного числа серий, подобных указанной в этом примере (например, серия для *or* и серия для *and*). Можно доказать, что при этом проблема выводимости остаётся разрешимой (схему доказательства можно найти в [7, с. 186]).

Упражнение 8.9. Найти значения (с категорией s) выражения *John runs or Bill thinks*.

Упражнение 8.10. Найти значения (с категорией s) выражения *John runs or jumps*.

Упражнение 8.11. Найти значения (с категорией s) выражения *John or Bill runs*.

Упражнение 8.12. Найти значения (с категорией np) выражения *the hat in or on the box*.

Пример 8.13. Пусть категориальный словарь содержит записи *vegetarian* $\Rightarrow$ **VEGETARIAN** : n , *socialist* $\Rightarrow$ **SOCIALIST** : n , *studied* $\Rightarrow$ **STUDY** : $np \setminus s$. Тогда выражение

the vegetarian and socialist studied

имеет два значения с категорией s , а именно

$$\mathbf{STUDY}(\mathbf{THE}(\lambda x. \mathbf{AND}(\mathbf{VEGETARIAN}(x))(\mathbf{SOCIALIST}(x)))) : s$$

и

$$\mathbf{AND}(\mathbf{STUDY}(\mathbf{THE}(\mathbf{VEGETARIAN}))) (\mathbf{STUDY}(\mathbf{THE}(\mathbf{SOCIALIST}))) : s.$$

Упражнение 8.14. Найти значения (с категорией s) выражения *Mary likes and Bill hates John*.

Упражнение 8.15. Найти значения (с категорией s) выражения *Mary likes and Val believes Bill hates John*.

Упражнение 8.16. Найти значения (с категорией s) выражения *John sees the big red or small white balloon*.

Упражнение 8.17. Найти значения (с категорией s) выражения *Mary sings slowly in Africa and charmingly in Europe*.

Упражнение 8.18. Найти значения (с категорией s) выражения *the flower in the box or the hat on the box is brown*.

Упражнение 8.19. Найти значения (с категорией s) выражения *the flower in or the hat on the box is brown*.

Упражнение 8.20. Найти значения (с категорией s) выражения *the flower in or hat on the box is brown*.

Упражнение 8.21. Найти значения (с категорией s) выражения *John shows and Bill gives Mary the flower and Val the hat*.

Упражнение 8.22. Найти значения (с категорией s) выражения *John sees the small pyramid on the green table or the big chair*.

Пример 8.23. Пусть категориальный словарь содержит записи $didn't \Rightarrow \lambda P.\lambda x.NOT(P(x)) : (np \setminus s)/(np \setminus s)$, $run \Rightarrow RUN : np \setminus s$, $jump \Rightarrow JUMP : np \setminus s$. Тогда выражение *John didn't run and jump* имеет два значения с категорией s , а именно $NOT(AND(RUN(JOHN))(JUMP(JOHN))) : s$ и $AND(NOT(RUN(JOHN)))(NOT(JUMP(JOHN))) : s$.

Пример 8.24. В приведённой выше системе выражение *John runs and or or Bill jumps* получает значение $OR(AND(RUN(JOHN))(JUMP(BILL)))(OR(RUN(JOHN))(JUMP(BILL))) : s$, но на самом деле это выражение не является предложением. Следовательно категориальный словарь, построенный в примере 8.8, слишком либерален. В работах М. Мортгата показано, как блокировать подобные нежелательные выводы. Б. Парти рекомендует блокировать их на уровне прагматики.

8.2 Кванторы

[7, 7.3, 7.4, 7.5, 3.3]

Определение 8.25. Для описания лингвистических кванторов вводится ещё один двуместный оператор $\uparrow$, действующий на категориях. В определение множества **Cat** добавляется пункт “если $A \in \mathbf{Cat}$ и $B \in \mathbf{Cat}$, то $(A \uparrow B) \in \mathbf{Cat}$ ”.

В определение функции $\text{Type} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Typ}$ добавляется пункт

$$\text{Type}(A \uparrow B) = (\text{Type}(A) \rightarrow \text{Type}(B)) \rightarrow \text{Type}(B).$$

В исчисление Ламбека добавляются следующие правила:

$$\frac{\Pi \rightarrow \beta : B \quad \Gamma, \beta : B, \Delta \rightarrow \alpha : A}{\Gamma, \Pi, \Delta \rightarrow \alpha : A} \text{ (cut)},$$

$$\frac{\Gamma, x : A, \Delta \rightarrow \beta : B}{\Gamma, \alpha : A \uparrow B, \Delta \rightarrow \alpha(\lambda x.\beta) : B} (\uparrow \rightarrow), \text{ где } x \text{ — новая переменная из } \mathbf{Var}_{\text{Type}(A)},$$

$$\frac{\Pi \rightarrow \alpha : A}{\Pi \rightarrow \lambda x.x(\alpha) : A \uparrow B} (\rightarrow \uparrow), \text{ где } x \text{ — новая переменная из } \mathbf{Var}_{\text{Type}(A) \rightarrow \text{Type}(B)}.$$

Пример 8.26. $\text{Type}(np \uparrow s) = (\mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Bool}) \rightarrow \mathbf{Bool}$.

Определение 8.27. Для каждого типа $\tau \in \mathbf{Typ}$ введём константы $\text{EVERY}_\tau \in \mathbf{Con}_{(\tau \rightarrow \mathbf{Bool}) \rightarrow \mathbf{Bool}}$ и $\text{SOME}_\tau \in \mathbf{Con}_{(\tau \rightarrow \mathbf{Bool}) \rightarrow \mathbf{Bool}}$. Терм $\text{EVERY}_\tau(\alpha)$ истинен тогда и только тогда, когда значением терма α является тождественно истинная функция. Терм $\text{SOME}_\tau(\alpha)$ истинен тогда и только тогда, когда значением терма α не является тождественно ложная функция.

Пример 8.28. Значение терма $\text{EVERY}_{\mathbf{Real}}(\lambda x.\text{LESS}(-1)(\text{TIMES}(x)(x)))$ — истина.

Пример 8.29. Значение терма $\text{SOME}_{\mathbf{Real}}(\lambda x.\text{LESS}(1)(x))$ — ложь.

Пример 8.30. Значение терма $\text{EVERY}_{\mathbf{Real}}(\lambda y.\text{SOME}_{\mathbf{Real}}(\lambda x.\text{LESS}(y)(x)))$ — истина.

Пример 8.31. Добавим в категориальный словарь записи $everyone \Rightarrow \text{EVERY}_{\mathbf{Ind}} : np \uparrow s$ и $someone \Rightarrow \text{SOME}_{\mathbf{Ind}} : np \uparrow s$.

Упражнение 8.32. Найти значения (с категорией s) выражения *someone runs*.

Упражнение 8.33. Найти значения (с категорией s) выражения *everyone defends someone*.

Определение 8.34. Введём следующие обозначения:

$$\text{SOME}^2 \Rightarrow \lambda P.\lambda Q.\text{SOME}_{\mathbf{Ind}}(\lambda x.(AND(P(x))(Q(x)))),$$

$$\text{EVERY}^2 \Rightarrow \lambda P.\lambda Q.\text{EVERY}_{\mathbf{Ind}}(\lambda x.(OR(NOT(P(x)))(Q(x)))),$$

$$\text{NO}^2 \Rightarrow \lambda P.\lambda Q.\text{NOT}(\text{SOME}_{\mathbf{Ind}}(\lambda x.(AND(P(x))(Q(x)))).$$

Пример 8.35. Добавим в категориальный словарь записи

$$\begin{aligned} \text{every} &\Rightarrow \text{EVERY}^2 : (np \uparrow s)/n, \\ \text{some} &\Rightarrow \text{SOME}^2 : (np \uparrow s)/n, \\ \text{no} &\Rightarrow \text{NO}^2 : (np \uparrow s)/n. \end{aligned}$$

Упражнение 8.36. Найти значения (с категорией s) выражения *every white dog barks*.

Упражнение 8.37. Найти значения (с категорией s) выражения *John and every kid ran*.

Пример 8.38. Введём константу $\text{IN}_2 \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Bool}}$. Терм $\text{IN}_2(\beta)(\alpha)$ истинен, если индивид, обозначаемый термом α , находится в индивиде, обозначаемом термом β . Например $\text{IN}_2(\text{AFRICA})(\text{JOHN})$ означает, что Джон находится в Африке. Введём обозначение $\text{IN} \Rightarrow \lambda u. \lambda P. \lambda x. \text{AND}(P(x))(u(\lambda y. \text{IN}_2(y)(x)))$, где $u \in \mathbf{Var}_{(\mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Bool}) \rightarrow \mathbf{Bool}}$. Добавим в категориальный словарь запись $\text{in} \Rightarrow \text{IN} : (n \setminus n)/(np \uparrow s)$. Тогда *every kid in some class studied* получает два значения.

Упражнение 8.39. Найти значения (с категорией s) выражения *someone likes every toy in some store*.

Упражнение 8.40. Найти значения (с категорией s) выражения *every kid in no class smiled*.

8.3 Модальная, временная и интенциональная логика

[7, Ch. 10–12]

Пример 8.41. Используем **BasCat** из примера 3.2. Пусть $\mathbf{BasTyp} = \{\mathbf{Bool}, \mathbf{Ind}, \mathbf{World}\}$. В подразумеваемой модели типу **World** соответствует множество так называемых *возможных миров* (possible worlds). Введём обозначение $\mathbf{Prop} \Rightarrow \mathbf{World} \rightarrow \mathbf{Bool}$. Тип **Prop** называется типом *пропозиций* (propositions). Пусть $\text{Type}(np) = \mathbf{Ind}$, $\text{Type}(s) = \mathbf{Prop}$ и $\text{Type}(n) = \mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Prop}$. Введём константу $\mathbf{actualWorld} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{World}}$. Будем использовать простейшие выражения из примера 3.25, но с константами других типов (из-за изменения функции Type). Например, $\text{RUN} \in \mathbf{Con}_{\mathbf{Ind} \rightarrow \mathbf{Prop}}$. Тогда смыслом предложения *John runs* является терм $\text{RUN}(\text{JOHN})$ типа **Prop**. Денотатом предложения *John runs* является терм $\text{RUN}(\text{JOHN})(\mathbf{actualWorld})$ типа **Bool**.

Пример 8.42. Добавим в категориальный словарь записи $\text{believes} \Rightarrow \text{BELIEVE} : (np \setminus s)/s$, $a \Rightarrow \text{SOME}^2 : (np \uparrow s)/n$.

Упражнение 8.43. Найти значения (с категорией s) выражения *John believes Mary loves Bill*.

Упражнение 8.44. Найти значения (с категорией s) выражения *John believes a student is shouting*.

9 Примеры зачётных задач

Упражнение 9.1. Верно ли, что $L \vdash p_1 \setminus (p_2/p_3) \rightarrow p_1 / (((p_1 \setminus p_2)/p_3) \setminus p_1)$?

Упражнение 9.2. Верно ли, что $L \vdash p_1 \setminus p_1, ((p_2/p_1) \setminus p_2) \setminus p_3 \rightarrow p_1 \setminus p_3$?

Упражнение 9.3. Верно ли, что $L \vdash ((p_1 \setminus p_2) \setminus p_3) \setminus p_4 \rightarrow p_3 \setminus ((p_2 \setminus p_1) \setminus p_4)$?

Упражнение 9.4. Верно ли, что $L \vdash p_3 \setminus ((p_2 \setminus p_1) \setminus p_4) \rightarrow ((p_1 \setminus p_2) \setminus p_3) \setminus p_4$?

Упражнение 9.5. Верно ли, что $L \vdash (p_2 \setminus p_3) \setminus (p_1 \setminus p_4) \rightarrow ((p_2/p_1) \setminus p_3) \setminus p_4$?

Упражнение 9.6. Всегда ли верно $(A/B) \setminus C = A/(B \setminus C)$?

Упражнение 9.7. Всегда ли верно $(A/B)/C = A/(B \cdot C)$?

Упражнение 9.8. Всегда ли верно $(A \cdot B) \setminus C = B \setminus (A \setminus C)$?

Упражнение 9.9. Вычислить $\{a, ab\} \setminus \{ab, abb, abbb, aba, abba\}$.

Упражнение 9.10. Вычислить

$$\{ab, ba, abba\} \setminus \{aba, abb, baa, abaa, baaa, abbab, abbaaa, babaaa, abbabaaa\}.$$

Упражнение 9.11. Вычислить $\{a^{2n}b^n \mid n \geq 1\} / \{a^{2n}b^n \mid n \geq 1\}$.

Упражнение 9.12. Существуют ли такие типы A , B и D , что $L \vdash D \rightarrow B$ и $L \not\vdash A \rightarrow ((D/A) \setminus D) / (B \setminus D)$?

Упражнение 9.13. Существуют ли такие типы A , B и C , что $L \vdash A \cdot C \rightarrow B \cdot C$ и $L \not\vdash A \rightarrow B$?

Упражнение 9.14. Существуют ли такие типы A , B , A_1 и B_1 , что $L \vdash A_1 \cdot B \rightarrow A \cdot B$, $L \vdash A \cdot B_1 \rightarrow A \cdot B$ и $L \not\vdash A_1 \cdot B_1 \rightarrow A \cdot B$?

Упражнение 9.15. Вычислить $\#_n((np/n) \cdot (n/n) \cdot n \cdot ((np/s)/np))$.

Упражнение 9.16. Вычислить $\llbracket ((p_1 \setminus p_2) \setminus p_3) \setminus p_1 \rrbracket$.

Упражнение 9.17. Найти нормальную форму λ -терма $(\lambda R. \lambda y. \lambda x. \text{AND}(R(x))(R(y)))(\text{RUN})(A)(B)$.

Упражнение 9.18. Вычислить $\llbracket \text{pyramid near the box on the table} \rrbracket_{\text{Lex}}$, если

$$\begin{aligned} \text{Lex} = \{ & \text{pyramid} \Rightarrow \text{PYRAMID} : n, \\ & \text{box} \Rightarrow \text{BOX} : n, \\ & \text{table} \Rightarrow \text{TABLE} : n, \\ & \text{near} \Rightarrow \text{NEAR} : (n \setminus n)/np, \\ & \text{on} \Rightarrow \text{ON} : (n \setminus n)/np, \\ & \text{the} \Rightarrow \iota_{\text{Ind}} : np/n \}. \end{aligned}$$

Литература

Основная литература

- [1] Бушковский В. Синтаксическое исчисление Ламбека и его семантика // Логические исследования. Вып. 1. — М.: Наука, 1993. — С. 77–96.
- [2] Гладкий А. В., Мельчук И. А. Элементы математической лингвистики. М.: Наука, 1969. — 192 с.
- [3] Ламбек И. Математическое исследование структуры предложения // Математическая лингвистика: Сборник переводов / Под ред. Ю. А. Шрейдера и др. — М.: Мир, 1964. — С. 47–68.
- [4] Логический подход к искусственному интеллекту: От классической логики к логическому программированию / Тейз А., Грибомон П., Луи Ж. и др. — М.: Мир, 1990.
- [5] Логический подход к искусственному интеллекту: От модальной логики к логике баз данных / Тейз А., Грибомон П., Юлен Г. и др. — М.: Мир, 1998. — 494 с.
- [6] Тестелец Я. Г. Введение в общий синтаксис. М.: Российск. гос. гуманит. ун-т, 2001. — 800 с.
- [7] Carpenter B. Type-Logical Semantics. — Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1997. — xxi, 575 p. — (Language, Speech, and Communication).
- [8] Categorical Grammars and Natural Language Structures / Editors R. T. Oehrle, E. Bach, and D. Wheeler. — Dordrecht: Reidel, 1988.
- [9] Dowty D. R. Word Meaning and Montague Grammar. — Dordrecht, 1979.
- [10] Dowty D. R., Wall R. E., and Peters S. Introduction to Montague Semantics. — Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [11] Janssen T. M. V. Foundations and Applications of Montague Grammar. — Amsterdam, 1986.

Литература, доступная в электронном виде

- [12] Карпенко А. С. Логика на рубеже тысячелетий. // Логические исследования. Вып. 7. — М.: Наука, 2000. — С. 7–60. — <http://www.philosophy.ru/library/logic/karpenko/01.html> или http://www.LOGIC.ru/Russian/LogStud/05/LS_5_r-Karpenko.pdf (2004-10-19).
- [13] Barker Ch. 2003-10-17. A gentle introduction to Type Logical Grammar, the Curry-Howard correspondence, and cut-elimination. <http://semanticsarchive.net/Archive/DMz0TFiN/barker.gentle.tlg.pdf> (2004-10-19).
- [14] Barker Ch. Lambda Tutorial. <http://ling.ucsd.edu/~barker/Lambda/> (2004-09-01).
- [15] Carpenter B. Type-Logical Grammar Theorem Prover. <http://www.colloquial.com/tlg/parser.html>
- [16] Ranta A. 2001-04-27. Grammatical Framework Tutorial. <http://www.cs.chalmers.se/~aarne/GF0/doc/tutorial/gf-tutorial.html> (2004-09-01).
- [17] Research papers of CoGenTex. <http://www.cogentex.com/research/papers.shtml>

Дополнительная литература

- [18] *Барендрегт Х.* Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. — М.: Мир, 1985. — 606 с.
- [19] *Герасимова И. А.* Формальные грамматики и интенциональная логика. — М., 2000. — 156 с. — <<http://www.auditorium.ru/books/1644/>> (20.03.2007).
- [20] *Маркус С.* Теоретико-множественные модели языков / Пер. с англ. М. В. Арапова. — М.: Наука, 1970. — 332 с.
- [21] *Ружа И.* Интенциональная логика без интенциональных переменных // Модальные и интенциональные логики и их применение к проблемам методологии науки / Редкол. Смирнов В. А., Карпенко А. С., Сидоренко Е. А. — М.: Наука, 1984. — С. 220–245.
- [22] Семантика модальных и интенциональных логик. — М.: Прогресс, 1981.
- [23] *Bar-Hillel Y.* A quasi-arithmetical notation for syntactic description // *Language*. — 1953. — Vol. 29. — P. 47–58.
- [24] *Bar-Hillel Y., Gaifman C., Shamir E.* On categorial and phrase-structure grammars // *Bull. Res. Council Israel Sect. F*. — 1960. — Vol. 9F. — P. 1–16.
- [25] *Formal Semantics: The Essential Readings*. — / Editors P. Portner and B. H. Partee. — Blackwell, 2002. — 486 p.
- [26] *Frege G.* Über Sinn und Bedeutung // *Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik*. — 1892. — B. 100. — S. 25–50.
- [27] *Handbook of Logic and Language* / Editors J. van Benthem and A. ter Meulen. — 1997. — 1272 p.
- [28] *Lambek J.* Contributions to a mathematical analysis of the English verb phrase // *J. Canadian Linguistic Assoc.* — 1959. — Vol. 5. — P. 83–89.
- [29] *Lambek J.* Grammar as mathematics // *Canadian Mathematical Bulletin*. — 1989. — Vol. 32, no. 3. — P. 257–273.
- [30] *Montague R.* The proper treatment of quantification in ordinary English // *Approaches to Natural Language: Proceedings of the 1970 Stanford Workshop on Grammar and Semantics* / Editors J. Hintikka, J. Moravcsik, and P. Suppes. — Dordrecht: Reidel, 1973.
- [31] *Morrill G.* Type-Logical Grammar. — Kluwer, 1994.
- [32] *Partee B., Meulen A. ter, and Wall R. E.* *Mathematical Methods in Linguistics*. — Kluwer, 1993.

Оглавление

1	Введение в семантику Монтегю	1
2	Лямбда-исчисление	1
2.1	Простая теория типов	1
2.2	Термы	2
2.3	Подстановка	4
2.4	Исчисление	5
3	Категориальная грамматика	7
3.1	Синтаксические категории	7
3.2	Типы категорий	8
3.3	Категориальный словарь	8
3.4	Базовая категориальная грамматика	8
3.5	Исчисление Ламбека без умножения	9
3.6	Категориальные грамматики Ламбека	10
4	Синтаксическое исчисление Ламбека	11
4.1	Определение	11
4.2	Устранимость сечения	12
4.3	Примеры выводов	14
4.4	Обратимость правил $(\rightarrow \backslash)$, $(\rightarrow /)$ и $(\cdot \rightarrow)$	15
4.5	Двойственность	15
4.6	Несколько допустимых правил	16
5	Граматики Ламбека без семантической составляющей	16
5.1	Определение	16
5.2	Грамматика Ламбека для фрагмента английского языка	16
5.3	Математические примеры грамматик Ламбека	16
6	Модели исчисления Ламбека	17
6.1	Полугруппы, моноиды и группы	17
6.2	Умножение и деление формальных языков	17
6.3	Свойства умножения и деления формальных языков	18
6.4	Определение языковой модели	18
6.5	Корректность исчисления Ламбека	19
6.6	Полнота исчисления Ламбека	19
6.7	Каноническая модель исчисления $L(\backslash, /)$	19
6.8	Доказательство полноты исчисления $L(\backslash, /)$	20
7	Алгебраические инварианты в исчислении Ламбека	20
7.1	Счётчики	20
7.2	Определение свободной группы	20
7.3	Интерпретация исчисления Ламбека в свободной группе	21
8	Моделирование лингвистических явлений	22
8.1	Союзы	22
8.2	Кванторы	23
8.3	Модальная, временная и интенциональная логика	24
9	Примеры зачётных задач	24
	Литература	25