Математический анализ

План занятий (ОТиПЛ, 2-й курс, осень 2003)

М. Р. Пентус

1 Действительные числа

[ИК, 1.1, 1.2], [Дем, I.1].

Аксиоматика множества действительных чисел (аксиомы поля, линейного порядка, аксиома полноты, аксиомы, связывающие сложение и порядок, умножение и порядок). Алгебраические свойства действительных чисел.

Справка 1.1. Иоганн Бернулли (Johann Bernoulli) (1667–1748) — швейцарский математик.
Справка 1.2. Исаак Ньюто́н (Isaac Newton) (1643–1727) — английский физик и математик.
Определение 1.3. *Множество натуральных чисел*: $\mathbb{N} \rightleftharpoons \{0, 1, 2, \ldots\}$.
Определение 1.4. *Множество целых чисел* обозначим $\mathbb{Z}$. *Множество положительных целых чисел* обозначим $\mathbb{Z}_+$.
Определение 1.5. *Целая часть*: $\lfloor a \rfloor \in \mathbb{Z}$, $\lfloor a \rfloor \leqslant a < \lfloor a \rfloor + 1$.
Определение 1.6. *Потолок*: $\lceil a \rceil \in \mathbb{Z}$, $\lceil a \rceil - 1 < a \leqslant \lceil a \rceil$.
Упражнение 1.7. Верно ли, что $n! \geqslant 2^{n-1}$ для всех положительных целых n?
Упражнение 1.8. Верно ли, что $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $a \geqslant -1$?
Теорема 1.9 (бином Ньютона). $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$. *(Известно, что $C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ для любого такого k, что $0 \leqslant k \leqslant n$.)*
Определение 1.10. *Множество действительных чисел* — это множество $\mathbb{R}$ с бинарными операциями $+$, $\cdot$, выделенными элементами 0, 1 и бинарным отношением $\leqslant$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $x + y = y + x$,
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
3) $x + 0 = x$,
4) $\forall x\, \exists y\, x + y = 0$,
5) $x \cdot y = y \cdot x$,
6) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,
7) $x \cdot 1 = x$,
8) $\forall x\, (x \neq 0 \to \exists y\, x \cdot y = 1)$,
9) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,
10) $0 \neq 1$,
11) $x \leqslant x$,
12) $(x \leqslant y \wedge y \leqslant z) \to x \leqslant z$,
13) $(x \leqslant y \wedge y \leqslant x) \to x = y$,
14) $x \leqslant y \vee y \leqslant x$,
15) $x \leqslant y \to x + z \leqslant y + z$,
16) $(x \leqslant y \wedge 0 \leqslant z) \to x \cdot z \leqslant y \cdot z$,
17) каждое сечение является дедекиндовым (см. определения 1.11 и 1.12).

(Здесь и далее $x \neq y$ является сокращением для записи $\neg(x = y)$.)
Определение 1.11. *Сечением* множества $\mathbb{R}$ называется упорядоченная пара $\langle A, B \rangle$, где $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = \mathbb{R}$, $(\forall a \in A)(\forall b \in B)\, a < b$. (Здесь и далее $x < y$ является сокращением для записи $(x \leqslant y \wedge x \neq y)$.)
Определение 1.12. Сечение $\langle A, B \rangle$ называется *дедекиндовым*, если $(\exists c \in A)(\forall a \in A)\, a \leqslant c$ или $(\exists c \in B)(\forall b \in B)\, b \geqslant c$. (Здесь и далее $x \geqslant y$ является сокращением для записи $y \leqslant x$.)
Замечание 1.13. Действительные числа называются также *вещественными числами*.
Замечание 1.14. Множество $\mathbb{R}$ можно определить конструктивно как множество классов эквивалентности бесконечных десятичных дробей, где две бесконечные десятичные дроби эквивалентны, если одна получается из другой заменой бесконечного ряда девяток на нули и увеличением предыдущей цифры (которая должна быть отлична от девятки) на единицу.

2 Предел последовательности

[ИК, 7.1], [Дем, I.2].

Последовательность, подпоследовательность. Предел числовой последовательности, сходящаяся последовательность.

Определение 2.1. *Последовательностью* действительных чисел называется функция из множества $\mathbb{N} - \{0\}$ в множество $\mathbb{R}$.
Определение 2.2. Последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \geqslant 1)(\forall n \geqslant N)\,|x_n| < \varepsilon$.
Упражнение 2.3. Является ли последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ бесконечно малой?
Упражнение 2.4. Является ли последовательность $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ бесконечно малой?
Определение 2.5. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом* последовательности действительных чисел $\{x_n\}$, если последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой.
Теорема 2.6. *Если число a является пределом последовательности $\{x_n\}$ и число b является пределом последовательности $\{x_n\}$, то $a = b$.*
Замечание 2.7. Если число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
Упражнение 2.8. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
Определение 2.9. Если у последовательности есть предел, то она называется *сходящейся*, иначе *расходящейся*.
Определение 2.10. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ называется *ε-окрестностью точки a*.
Замечание 2.11. Неравенство $|x-a| < \varepsilon$ выполняется тогда и только тогда, когда число x принадлежит ε-окрестности точки a.

Домашнее задание

Упражнение 2.12. [Дем] № 28, 51.
Упражнение 2.13. Является ли последовательность

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{99}, & \text{если } (\exists m \in \mathbb{N})\, n = 2^m, \\ \frac{1}{n} & \text{иначе} \end{cases}$$

бесконечно малой?
Упражнение 2.14. Является ли последовательность $x_n = \frac{2n}{n^3+1}$ бесконечно малой?

3 Свойства пределов

[ИК, 7.1], [Дем, I.2].

Свойства пределов последовательностей.

Определение 3.1. Последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $(\forall A > 0)(\exists N \geqslant 1)(\forall n \geqslant N)\,|x_n| > A$.
Упражнение 3.2. Является ли последовательность $x_n = 3n$ бесконечно большой?
Теорема 3.3. *Пусть последовательность $\{y_n\}$ является бесконечно большой. Тогда начиная с некоторого номера N определена последовательность $\{\frac{1}{y_n}\}$ (то есть $(\exists N \geqslant 1)(\forall n \geqslant N)\, y_n \neq 0$) и она является бесконечно малой.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 153]. ☐

Теорема 3.4. *Если $q > 1$, то последовательность $\{q^n\}$ является бесконечно большой.*

Доказательство. Пусть $q > 1$ и $A > 0$. Положим $\alpha = 1 - q$ и $N = \lceil A/\alpha \rceil$. Если $n \geqslant N$, то $q^n \geqslant q^N = (1+\alpha)^N \geqslant 1 + N\alpha \geqslant 1 + (A/\alpha)\alpha = 1 + A > A$. ☐

Теорема 3.5. *Если $0 < r < 1$, то последовательность $\{r^n\}$ является бесконечно малой.*

Доказательство. Пусть $0 < r < 1$. Положим $q = \frac{1}{r}$. Последовательность $\{q^n\}$ является бесконечно большой. Следовательно, последовательность $\{\frac{1}{q^n}\}$ является бесконечно малой. ☐

Упражнение 3.6. Является ли последовательность $(\sqrt{7}-2)^1, (\sqrt{7}-2)^2, (\sqrt{7}-2)^3, \ldots$ бесконечно малой? Бесконечно большой?
Упражнение 3.7. Является ли последовательность $(\sqrt{10}-2)^1, (\sqrt{10}-2)^2, (\sqrt{10}-2)^3, \ldots$ бесконечно малой? Бесконечно большой?
Определение 3.8. Последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если $(\exists C \in \mathbb{R})(\forall n \geqslant 1)\, x_n \leqslant C$.
Определение 3.9. Последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если $(\exists B \in \mathbb{R})(\forall n \geqslant 1)\, x_n \geqslant B$.
Определение 3.10. Последовательность действительных чисел называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и ограничена снизу.
Упражнение 3.11. Является ли ограниченной последовательность $3-\frac{1}{2}, 2^2, 3-\frac{1}{3}, 3^2, 3-\frac{1}{4}, 4^2, \ldots$?
Замечание 3.12. Всякая бесконечно малая последовательность является ограниченной. Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.
Замечание 3.13. Никакая бесконечно большая последовательность не является ограниченной.
Упражнение 3.14. Является ли последовательность $x_n = \pi$ бесконечно малой? Бесконечно большой? Ограниченной?
Теорема 3.15. *Пусть последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ являются бесконечно малыми. Тогда последовательности $\{\alpha_n + \beta_n\}$ и $\{\alpha_n - \beta_n\}$ являются бесконечно малыми.*

Домашнее задание

Упражнение 3.16. Является ли последовательность $x_n = (3 + \frac{(-1)^n}{n})^2 - 9$ бесконечно малой?

4 Арифметические операции над последовательностями

[ИК, 7.1], [Дем, I.2].

Теорема 4.1. *Пусть последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной и последовательность $\{\alpha_n\}$ является бесконечно малой. Тогда последовательность $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ является бесконечно малой.*
Упражнение 4.2. Является ли последовательность $y_n = \frac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$ бесконечно малой?
Упражнение 4.3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n}{n!}$.
Упражнение 4.4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.
Ответ 4.4. 1. Обозначим $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Очевидно, $\alpha_n \geqslant 0$. При $n \geqslant 2$ выполняется неравенство $1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 \leqslant n$ и, следовательно, $\alpha_n < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$.
Теорема 4.5. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.*
Теорема 4.6. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $b \neq 0$. Тогда $(\exists N \geqslant 1)(\forall n \geqslant N)\, y_n \neq 0$ (то есть начиная с некоторого номера N определена последовательность $\{\frac{x_n}{y_n}\}$) и $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{a}{b}$.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 157]. □

Теорема 4.7. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $(\exists N \geqslant 1)(\forall n \geqslant N)\, x_n \leqslant b$. Тогда $a \leqslant b$.*
Замечание 4.8. Аналогично для $\geqslant$.
Теорема 4.9. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $(\exists N \geqslant 1)(\forall n \geqslant N)\, x_n \leqslant y_n$. Тогда $a \leqslant b$.*

Домашнее задание

Упражнение 4.10. Доказать теорему о пределе произведения.
Упражнение 4.11. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2-(n-3)^2}{(n+2)^2-(n+\frac{1}{n})^2}$.

5 Монотонные последовательности, критерий Коши

[ИК, 7.2, 7.5], [Дем, I.2].

Критерий Коши сходимости последовательности. Теорема Вейерштрасса о существовании предела монотонной ограниченной последовательности.

Справка 5.1. Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (Karl Theodor Wilhelm Weierstra■) (1815–1897) — немецкий математик.
Справка 5.2. Огюстен Луи Коши (Augustin Louis Cauchy) (1789–1857) — французский математик.
Определение 5.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей*, если $(\forall n \geqslant 1)\, x_n \leqslant x_{n+1}$.
Упражнение 5.4. Является ли последовательность $x_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ неубывающей?
Упражнение 5.5. Является ли последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ неубывающей?
Определение 5.6. Последовательность $\{x_n\}$ называется *невозрастающей*, если $(\forall n \geqslant 1)\, x_n \geqslant x_{n+1}$.
Определение 5.7. Последовательность называется *монотонной*, если она является неубывающей или невозрастающей.
Теорема 5.8 (теорема Вейерштрасса). *Если последовательность является неубывающей и ограниченной сверху, то она сходится. Если последовательность является невозрастающей и ограниченной снизу, то она сходится.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ является неубывающей и ограниченной сверху. Положим $A \rightleftharpoons \{a \in \mathbb{R} \mid (\exists m \geqslant 1)\, a \leqslant x_m\}$ и $B \rightleftharpoons \{b \in \mathbb{R} \mid (\forall m \geqslant 1)\, x_m < b\}$. Очевидно, $\langle A, B \rangle$ является сечением множества $\mathbb{R}$. Следовательно, найдётся такое число c, что $(\forall a \in A)\, a \leqslant c$ и $(\forall b \in B)\, c \leqslant b$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Для каждого n выполняется $x_n \leqslant c$, так как $x_n \in A$. Осталось доказать, что $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \geqslant 1)(\forall n \geqslant N)\, c - x_n < \varepsilon$. Зафиксируем произвольное положительное число ε. Так как $c - \frac{\varepsilon}{2} \in A$, то найдётся такой номер $m \geqslant 1$, что $c - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant x_m$. Для любого номера $n \geqslant m$ выполняется $x_n \geqslant x_m \geqslant c - \frac{\varepsilon}{2} > c - \varepsilon$ и, следовательно, $c - x_n < \varepsilon$. □

Упражнение 5.9. Является ли последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ограниченной?
Определение 5.10. Число e определяется так: $e \rightleftharpoons \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
Определение 5.11. Последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \geqslant 1)(\forall n \geqslant N)(\forall p \in \mathbb{N})\, |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.
Теорема 5.12. *Если последовательность фундаментальна, то она ограниченна.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 169–170]. □

Теорема 5.13 (критерий Коши). *Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 170–171]. □

Домашнее задание

Упражнение 5.14. [Дем] № 47, 48, 49, 78.

6 Функция и её предел

[ИК, 7.3.2, 8.1, 8.2], [Дем, I.3–I.5].

Функция. Композиция функций. Обратная функция.
Предел функции, свойства пределов. Вопросы существования предела функции.

Справка 6.1. Генрих Эдуард Гейне (Heinrich Eduard Heine) (1821–1881) — немецкий математик.
Определение 6.2. Область определения функции f обозначим $\operatorname{Dom} f$.
Определение 6.3. Число a называется *предельной точкой* множества $C \subseteq \mathbb{R}$, если в любой ϵ-окрестности лежит бесконечное число элементов этого множества.
Определение 6.4. Пусть действительное число a является предельной точкой множества $\operatorname{Dom} f$. Число b называется *пределом функции f в точке a по Гейне*, если для любой такой последовательности действительных чисел $\{x_n\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\forall n\, (x_n \in \operatorname{Dom} f \wedge x_n \neq a)$, выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Определение 6.5. Пусть действительное число a является предельной точкой множества $\operatorname{Dom} f$. Число b называется *пределом функции f в точке a по Коши*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \operatorname{Dom} f)\,(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Теорема 6.6. *Число b является пределом функции f в точке a по Гейне тогда и только тогда, когда оно является пределом функции f в точке a по Коши.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 176–177]. □

Теорема 6.7. *Если функция f имеет предел в точке a, то этот предел определён однозначно.*
Замечание 6.8. Если число b является пределом функции f в точке a, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.
Определение 6.9. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда множество $(a-\varepsilon, a)\cup(a, a+\varepsilon)$ называется *проколотой ε-окрестностью точки a*.
Замечание 6.10. Пусть действительное число a является предельной точкой множества $\operatorname{Dom} f$. Очевидно, $\lim\limits_{x\to a} f = b$ тогда и только тогда, когда для любой ε-окрестности точки b найдётся проколотая δ-окрестностью точки a, образы всех элементов которой лежат в рассматриваемой ε-окрестности точки b.
Определение 6.11. Пусть действительное число a является предельной точкой множества $(a, +\infty)\cap\operatorname{Dom} f$. Число b называется *правым пределом функции f в точке a*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \operatorname{Dom} f)\,(0 < x - a < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Замечание 6.12. Если число b является правым пределом функции f в точке a, то пишут $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$.
Определение 6.13. Пусть действительное число a является предельной точкой множества $(-\infty, a)\cap\operatorname{Dom} f$. Число b называется *левым пределом функции f в точке a*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \operatorname{Dom} f)\,(-\delta < x - a < 0 \to |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Замечание 6.14. Если число b является левым пределом функции f в точке a, то пишут $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$.
Замечание 6.15. Пусть действительное число a является одновременно предельной точкой множества $(a, +\infty) \cap \operatorname{Dom} f$ и предельной точкой множества $(-\infty, a) \cap \operatorname{Dom} f$. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \leftrightarrow \lim_{x\to a+0} f(x) = b \wedge \lim_{x\to a-0} f(x) = b.$$

Определение 6.16. Пусть множество $\operatorname{Dom} f$ не является ограниченной сверху. Число b называется *пределом функции f при $x \to +\infty$*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \operatorname{Dom} f)\,(x > \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Замечание 6.17. Аналогично определяется предел при $x \to -\infty$ и $x \to \infty$.
Замечание 6.18. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ и для всех натуральных чисел n выполняется равенство $y_n = f(n)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Домашнее задание

Упражнение 6.19. [Дем] № 166, 183, 188, 226.

7 Признаки существования предела функции

[ИК, 8.3–8.5], [Дем, I.5, I.6].

Функция. Композиция функций. Обратная функция.
Предел функции, свойства пределов. Вопросы существования предела функции.

Определение 7.1. Пусть действительное число a является предельной точкой множества $\operatorname{Dom} f$. Будем говорить, что *функция f удовлетворяет в точке a условию Коши*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x' \in \operatorname{Dom} f)(\forall x'' \in \operatorname{Dom} f)\,(0 < |x' - a| < \delta \wedge 0 < |x'' - a| < \delta \to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon).$$

Теорема 7.2. *Функция f имеет предел в точке a тогда и только тогда, когда f удовлетворяет в точке a условию Коши.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 181–183]. □

Теорема 7.3. *Пусть* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = b+c$, $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x)) = b-c$, $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = b\cdot c$.

Без доказательства. См. [ИК, с. 183–184]. □

Теорема 7.4. *Пусть* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ *и* $c \neq 0$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{b}{c}$.

Без доказательства. См. [ИК, с. 183–184]. □

Определение 7.5. Функция f называется *бесконечно малой* в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Определение 7.6. Пусть функции α и β являются бесконечно малыми в точке a. Говорят, что α является в точке a бесконечно малой *более высокого порядка*, чем β, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$. В этом случае пишут $\alpha = o(\beta)$.

Определение 7.7. Пусть функции α и β являются бесконечно малыми в точке a. Говорят, что α и β являются в точке a *бесконечно малыми одного порядка*, если найдётся такое действительное число $A \neq 0$, что $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$.

Определение 7.8. Пусть функции α и β являются бесконечно малыми в точке a. Говорят, что α и β являются в точке a *эквивалентными бесконечно малыми*, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. В этом случае пишут $\alpha \sim \beta$.

Определение 7.9. Пусть действительное число a является предельной точкой множества $\operatorname{Dom} f$. Функция f называется *бесконечно большой* в точке a, если

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \operatorname{Dom} f)\,(0 < |x-a| < \delta \to |f(x)| > \varepsilon).$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Определение 7.10. Пусть функции f и g являются бесконечно большими в точке a. Говорят, что f является в точке a бесконечно большой *более высокого порядка*, чем g, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Упражнение 7.11. [Дем] № 166, 183–188, 195, 200, 224–227.

Упражнение 7.12. [Дем] № 253–257, 298–299, 341–344.

Упражнение 7.13. [Дем] № 411–413, 418–423, 436–438, 471–474.

8 Непрерывность функции

[ИК, 9.1, 9.3], [Дем, I.7].

Непрерывность функции в точке. Точки разрыва. Свойства функции, непрерывной на отрезке принимать промежуточные значения.

Определение 8.1. Пусть действительное число a принадлежит множеству $\operatorname{Dom} f$ и является предельной точкой множества $\operatorname{Dom} f$. Функция f называется *непрерывной в точке* a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Иначе точка a называется *точкой разрыва* функции f.

Определение 8.2. Пусть действительное число a принадлежит множеству $\operatorname{Dom} f$ и является предельной точкой множества $(a, +\infty) \cap \operatorname{Dom} f$. Функция f называется *непрерывной в точке a справа*, если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$.

Определение 8.3. Функция называется непрерывной на множестве $A \subseteq \mathbb{R}$, если она непрерывна в каждой точке множества A.

Теорема 8.4. *Пусть* $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$, *функция* f *является непрерывной на* $[a, b]$, $f(a) < 0$ *и* $f(b) > 0$. *Тогда найдётся такое число* $c \in [a, b]$, *что* $f(c) = 0$.

Доказательство. Положим $A \rightleftharpoons \{x \in [a, b] \mid f(x) \leqslant 0\} \cup (-\infty, a)$ и $B \rightleftharpoons \{x \in [a, b] \mid f(x) > 0\} \cup (b, +\infty)$. Очевидно, $\langle A, B\rangle$ является сечением множества $\mathbb{R}$. Следовательно, найдётся такое число c, что $(\forall x \in A)\, x \leqslant c$ и $(\forall x \in B)\, c \leqslant x$. Так как $c > a$, то $f(c) = \lim\limits_{x\to c-0} f(x) \leqslant 0$. Так как $c < b$, то $f(c) = \lim\limits_{x\to c+0} f(x) \geqslant 0$. Следовательно, $f(c) = 0$. □

Теорема 8.5. *Пусть* $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$, *функция* f *является непрерывной на* $[a, b]$ *и либо* $f(a) \leqslant \gamma \leqslant f(b)$ *либо* $f(b) \leqslant \gamma \leqslant f(a)$. *Тогда найдётся такое число* $c \in [a, b]$, *что* $f(c) = \gamma$.

Доказательство. Если $\gamma = f(a)$, то положим $\gamma \rightleftharpoons a$. Если $\gamma = f(b)$, то положим $\gamma \rightleftharpoons b$. Если $f(a) < \gamma < f(b)$, то применим предыдущую теорему к функции $g(x) \rightleftharpoons f(x) - \gamma$. Если $f(b) < \gamma < f(a)$, то применим предыдущую теорему к функции $g(x) \rightleftharpoons \gamma - f(x)$. □

Домашнее задание

Упражнение 8.6. [Дем] № 344, 413.

9 Элементарные функции

[ИК, 9.5–9.7], [Дем, I.7].

Теорема о пределе композиции функций. Замечательные пределы.

Теорема 9.1. *Пусть* $\lim\limits_{t\to a} \varphi(t) = b$ $(\exists\delta > 0)\,(b-\delta, b+\delta) \subseteq \operatorname{Dom} f$ *и* $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$. *Рассмотрим сложную функцию* $F(t) \rightleftharpoons f(\varphi(t))$. *Тогда* $\lim\limits_{t\to a} F(t) = c$.

Без доказательства. См. [ИК, с. 200–201]. □

Теорема 9.2. *Пусть* $\varphi(a) = b$, $(\exists\delta > 0)\,(b-\delta, b+\delta) \subseteq \operatorname{Dom} f$, *функция* φ *является непрерывной в точке* a *и функция* f *является непрерывной в точке* b. *Тогда сложная функция* $F(t) \rightleftharpoons f(\varphi(t))$ *является непрерывной в точке* a.

Без доказательства. См. [ИК, с. 200–201]. □

Определение 9.3. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$. *Точной верхней гранью* множества A (обозначение $\sup A$) называется такое число $c \in \mathbb{R}$, что $(\forall a \in A)\, a \leqslant c \wedge (\forall b < c)(\exists a \in A)\, a > b$.
Определение 9.4. Пусть $a > 0$ и $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\sqrt[n]{a}$ равен такому числу $b > 0$, что $b^n = a$.
Определение 9.5. Пусть $a > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $a^{\frac{m}{n}} \rightleftharpoons \sqrt[n]{a^m}$ и $a^{-\frac{m}{n}} \rightleftharpoons \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.
Замечание 9.6. Это определение корректно.
Определение 9.7. Пусть $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$.
- Если $a \geqslant 1$, то $a^b \rightleftharpoons \sup\{a^r \mid r \in \mathbb{Q},\ r \leqslant b\}$.
- Если $0 < a < 1$, то $a^b \rightleftharpoons \frac{1}{(\frac{1}{a})^b}$.

Замечание 9.8. Это определение согласовано с предыдущим определением.
Теорема 9.9. *Если* $a > 0$, *то* $a^b > 0$. *Если* $a > 0$, *то* $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ *и* $a^{b\cdot c} = (a^b)^c$. *Если* $a_1 > 0$ *и* $a_2 > 0$, *то* $(a_1 \cdot a_2)^b = a_1^b \cdot a_2^b$. *Если* $a > 1$ *и* $b > 0$, *то* $a^b > 1$.

Без доказательства. См. [ИК, с. 201–205]. □

Следствие 9.10. *При любом* $b \in \mathbb{R}$ *выполняется равенство* $1^b = 1$. *Если* $a > 0$, *то* $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ *и* $(\frac{1}{a})^b = \frac{1}{a^b}$. *Если* $a > 1$, *то* $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ *и* $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.
Определение 9.11. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Тогда $\log_a x$ равен такому числу $y \in \mathbb{R}$, что $a^y = x$.
Теорема 9.12. *Если* $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ *и* $a \neq 1$, *то* $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$. *Если* $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq 1$ *и* $b \neq 1$, *то* $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$. *Если* $a > 1$ *и* $b > 1$, *то* $\log_a b > 0$. *Если* $a > 0$ *и* $a \neq 1$, *то* $\log_a 1 = 0$ *и* $\log_a a = 1$. *Если* $a > 0$, $b > 0$ *и* $a \neq 1$, *то* $\log_a(b^c) = c\log_a b$, $\log_a(\frac{1}{b}) = -\log_a b$ *и* $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$.

Без доказательства. □

Определение 9.13. Пусть $x > 0$. Тогда $\ln x \rightleftharpoons \log_e x$.
Определение 9.14. Через $\sin$ и $\cos$ обозначим две функции со следующими свойствами:
- $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$,
- $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$,
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
- $\cos 0 = 1$,
- $\sin \frac{\pi}{2} = 1$,
- $(\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})\, 0 < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$.

Замечание 9.15. Можно доказать, что такие функции существуют и определены однозначно.
Теорема 9.16 (первый замечательный предел). $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Без доказательства. См. [ИК, с. 215–216]. $\square$

Теорема 9.17 (второй замечательный предел). $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Без доказательства. См. [ИК, с. 216–219]. $\square$

Определение 9.18. Функции $\operatorname{sh} x \rightleftharpoons \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x \rightleftharpoons \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x \rightleftharpoons \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и $\operatorname{cth} x \rightleftharpoons \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ называются соответственно *гиперболическим синусом*, *гиперболическим косинусом*, *гиперболическим тангенсом* и *гиперболическим котангенсом*.

10 Глобальные свойства непрерывных функций

[ИК, 9.9], [Дем, I.7].

Свойства функции, непрерывной на отрезке быть ограниченной, достигать своих точных граней.

Теорема 10.1 (первая теорема Вейерштрасса). *Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограниченна на этом отрезке.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 221]. $\square$

Теорема 10.2 (вторая теорема Вейерштрасса). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Пусть $\sup\{f(x) \mid a \leqslant x \leqslant b\} = M$. Тогда $(\exists c \in [a, b])\, f(c) = M$.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 222–223]. $\square$

Упражнение 10.3. [Дем] № 418, 436, 471.
Упражнение 10.4. [Дем] № 675–730.

11 Дифференцирование функции

[ИК, 10.1–10.4], [Дем, II.1, II.3, II.4].

Производные и дифференциалы, их геометрический смысл. Основные правила дифференцирования: дифференцирование и арифметические операции, дифференцирование композиции функций, дифференцирование обратной функции.

Определение 11.1. Пусть даны функция f и действительное число x. Пусть $x \in \operatorname{Dom} f$ и x является предельной точкой множества $\operatorname{Dom} f$. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, то он обозначается $f'(x)$ и называется *производной* функции $f(x)$ в точке x. (Здесь Δx — новая переменная.)
Замечание 11.2. Производная зависит от выбора действительного числа x. По-этому его можно рассматривать как функцию от x.
Замечание 11.3. Пусть функция f имеет в точке x производную. Тогда существует касательная к графику функции f в точке $(x, f(x))$ и тангенс угла наклона этой касательной равен $f'(x)$.
Определение 11.4. Пусть даны функция f и действительное число x. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0+0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, то он обозначается $f'(x+0)$ и называется *правой производной* функции $f(x)$ в точке x.
Определение 11.5. Пусть даны функция f и действительное число x. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0-0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, то он обозначается $f'(x-0)$ и называется *правой производной* функции $f(x)$ в точке x.
Определение 11.6. При рассмотрении функции $y = f(x)$ принято через Δy обозначать выражение $f(x+\Delta x) - f(x)$. При этом Δy называется *приращением* функции f, соответствующим приращению аргумента Δx.
Определение 11.7. Функция f называется *дифференцируемой* в данной точке x, если найдётся такое действительное число A, что $\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. При этом линейную функцию $A \cdot \Delta x$ (с аргументом Δx) называют *дифференциалом* функции f в данной точке x.
Теорема 11.8. *Функция f дифференцируема в данной точке x тогда и только тогда, когда функция f имеет в точке x производную. При этом $A = f'(x)$.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 230–231]. $\square$

Замечание 11.9. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Теорема 11.10. *Если функция f дифференцируема в данной точке x, то она и непрерывна в этой точке.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 231]. □

Теорема 11.11. *Рассмотрим сложную функцию $F(t) \rightleftharpoons f(\varphi(t))$. Пусть $t \in \operatorname{Dom} F$ и t является предельной точкой множества $\operatorname{Dom} F$. Если функция φ дифференцируема в точке t и функция f дифференцируема в точке $\varphi(t)$, то функция F дифференцируема в точке t и $F'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 233–234]. □

Теорема 11.12. *Теорема 4 на с. 234–235.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 235]. □

Теорема 11.13. *Теорема 5 на с. 237.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 237–239]. □

12 Дифференцирование элементарных функций

[ИК, 10.5, 10.6, 11.1], [Дем, II.5, II.11].

Таблица производных элементарных функций.

Справка 12.1. Готфрид Вильгельм Лейбниц (Gottfried Wilhelm Leibniz) (1646–1716) — немецкий философ, математик, физик, изобретатель, юрист, историк, языковед.
Теорема 12.2. *Таблица на с. 246.*

Доказательство. См. [ИК, с. 240–246]. □

Упражнение 12.3. Вычислить производную функции $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^k}$, где $k \in \mathbb{N}$.
Упражнение 12.4. Вычислить производную функции $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^k}$, где $k \in \mathbb{N}$.
Упражнение 12.5. Вычислить производную функции $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$.
Теорема 12.6. *Пусть функция f дифференцируема в данной точке x и $f(x) > 0$. Тогда $f'(x) = f(x)(\ln f(x))'$.*

Доказательство. См. [ИК, с. 249]. □

Упражнение 12.7. Вычислить производную функции $y = \frac{(x-1)^3\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.
Определение 12.8. Определение на с. 250.
Теорема 12.9. *Формула Лейбница на с. 251.*

Доказательство. См. [ИК, с. 251–252]. □

Определение 12.10. Пусть $\delta > 0$ и $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \operatorname{Dom} f$. Говорят, что функция f *возрастает* в точке x_0, если

$$(\exists \varepsilon \leqslant \delta)(\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))\,((x < x_0 \to f(x) < f(x_0)) \land (x > x_0 \to f(x) > f(x_0))).$$

Говорят, что функция f *убывает* в точке x_0, если

$$(\exists \varepsilon \leqslant \delta)(\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))\,((x < x_0 \to f(x) > f(x_0)) \land (x > x_0 \to f(x) < f(x_0))).$$

Теорема 12.11. *Теорема 1 на с. 258.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 258]. □

Определение 12.12. Пусть $\delta > 0$ и $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \operatorname{Dom} f$. Говорят, что функция f имеет в точке x_0 *локальный максимум*, если

$$(\exists \varepsilon \leqslant \delta)(\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))\, f(x) \leqslant f(x_0).$$

Говорят, что функция f имеет в точке x_0 *локальный минимум*, если

$$(\exists \varepsilon \leqslant \delta)(\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))\, f(x) \geqslant f(x_0).$$

Определение 12.13. Говорят, что функция f имеет в точке x_0 *локальный экстремум*, если она имеет в этой точке локальный максимум или локальный минимум.
Теорема 12.14. *Теорема 2 на с. 259.*

Доказательство. См. [ИК, с. 259]. □

Упражнение 12.15. Пусть $a > 0$ и $b > 0$. Найти локальные экстремумы функции $y = a(x-c) + \frac{b}{x-c}$.
Ответ 12.15. Локальный максимум $c - \sqrt{\frac{b}{a}}$, локальный минимум $c + \sqrt{\frac{b}{a}}$.

Домашнее задание

Упражнение 12.16. [Бер] № 557, 732, 943, 964.

13 Теоремы о дифференцируемых функциях

[ИК, 11.2.1, 11.2.2, 11.3], [Дем, II.6].

Теорема Лагранжа о конечном приращении и её следствия.

Справка 13.1. Жозеф Луи Лагранж (Joseph Louis Lagrange) (1736–1813) — французский математик и механик.
Справка 13.2. Мишель Ролль (Michel Rolle) (1652–1719) — французский математик.
Теорема 13.3 (теорема Ролля). *Пусть $a < b$, функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, функция f дифференцируема на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогда найдётся такое число $\xi \in (a, b)$, что $f'(\xi) = 0$.*

Доказательство. См. [ИК, с. 259–260]. □

Теорема 13.4 (теорема Лагранжа). *Пусть $a < b$, функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и функция f дифференцируема на интервале (a, b). Тогда найдётся такое число $\xi \in (a, b)$, что $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Доказательство. Применим теорему Ролля к функции $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Очевидно, $h(a) = f(a)$, $h(b) = f(a)$ и $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Теорема 13.5 (теорема Коши). *Теорема 8 на с. 263.*

Доказательство. Применим теорему Ролля к функции $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$. Очевидно, $h(a) = f(a)$, $h(b) = f(a)$ и $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}g'(x)$. □

14 Правило Лопиталя, возрастание и убывание функции

[ИК, 11.4, 9.4.1, 11.2.3, 11.2.4], [Дем, II.7, II.9].

Правило Лопиталя.

Справка 14.1. Гийом Франсуа Антуан де Лопиталь (Guillaume François Antoine de L'Hospital) (1661–1704) — французский математик.
Теорема 14.2 (правило Лопиталя для неопределённостей вида $\frac{0}{0}$). *Пусть $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$, $\varepsilon > 0$, функции f и g дифференцируемы на $(a, a+\varepsilon)$, $(\forall x \in (a, a+\varepsilon))\, g'(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$. Тогда $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = c$.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 265]. □

Замечание 14.3. Можно доказать аналогичные теоремы для пределов при $x \to a-0$, $x \to a$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ и $x \to \infty$.
Упражнение 14.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.
Упражнение 14.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Теорема 14.6 (правило Лопиталя для неопределённостей вида $\frac{\infty}{\infty}$). *См. [ИК, с. 266–267].*

Без доказательства. □

Упражнение 14.7. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$.

Теорема 14.8. *Теорема 5 на с. 261.*

Доказательство. См. [ИК, с. 261]. □

Определение 14.9. Пусть $A \subseteq \operatorname{Dom} f$. Функция f называется *неубывающей* на множестве A, если $(\forall x_1 \in A)(\forall x_2 \in A)\,(x_1 < x_2 \to f(x_1) \leqslant f(x_2))$. Функция f называется *невозрастающей* на множестве A, если $(\forall x_1 \in A)(\forall x_2 \in A)\,(x_1 < x_2 \to f(x_1) \geqslant f(x_2))$. Функция f называется *нестрого монотонной* (или просто *монотонной*) на множестве A, если она является неубывающей на множестве A или невозрастающей на множестве A.

Определение 14.10. Пусть $A \subseteq \operatorname{Dom} f$. Функция f называется *возрастающей* на множестве A, если $(\forall x_1 \in A)(\forall x_2 \in A)\,(x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2))$. Функция f называется *убывающей* на множестве A, если $(\forall x_1 \in A)(\forall x_2 \in A)\,(x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2))$. Функция f называется *строго монотонной* на множестве A, если она является возрастающей на множестве A или убывающей на множестве A.

Упражнение 14.11. Является ли функция $y = x^3$ возрастающей на $\mathbb{R}$?

Теорема 14.12. *Теорема 6 на с. 262.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 262]. □

Упражнение 14.13. Является ли функция $y = x^3 + |x|^3$ неубывающей на $\mathbb{R}$?

Теорема 14.14. *Теорема 7 на с. 262.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 262–263]. □

Домашнее задание

Упражнение 14.15. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$.

Упражнение 14.16. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

Упражнение 14.17. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

15 Формула Тейлора

[ИК, 11.5–11.7], [Дем, II.10].

Формула Тейлора. Применение к приближенным вычислениям.

Справка 15.1. Колин Макло́рен (Colin Maclaurin) (1698–1746) — шотландский математик.

Справка 15.2. Джузеппе Пеа́но (Giuseppe Peano) (1858–1932) — итальянский математик.

Справка 15.3. Брук Те́йлор (Brook Taylor) (1685–1731) — английский математик.

Замечание 15.4. Докажем, что $(\forall b > 0)(\exists \xi \in (0, b))\ \sin b = b - \frac{b^3}{6} + \frac{b^4}{24}\sin\xi$.

Пусть $b > 0$. Рассмотрим функции $h(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\cos x}{1}(b-x) + \frac{-\sin x}{2}(b-x)^2 + \frac{-\cos x}{6}(b-x)^3$ и $g(x) = (b-x)^4$. Очевидно,

$$h'(x) = \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos x}{1} + \frac{-\sin x}{1}(b-x) - \frac{-\sin x}{2}2(b-x) + \frac{-\cos x}{2}(b-x)^2 - \frac{-\cos x}{6}3(b-x)^2 + \frac{\sin x}{6}(b-x)^3 = \\ = \frac{\sin x}{6}(b-x)^3$$

и $g'(x) = -4(b-x)^3$. Применим теорему Коши к функциям h и g на интервале $(0, b)$. Заметим что $h(0) = b - \frac{b^3}{6}$, $h(b) = \sin b$, $g(0) = b^4$, $g(b) = 0$. Согласно теореме Коши найдётся такое число $\xi \in (0, b)$, что

$$\frac{\sin b - (b - \frac{b^3}{6})}{0 - b^4} = \frac{\frac{\sin\xi}{6}(b-\xi)^3}{-4(b-\xi)^3}.$$

Замечание 15.5. Аналогично можно доказать, что $(\forall b < 0)(\exists \xi \in (b, 0))\ \sin b = b - \frac{b^3}{6} + \frac{b^4}{24}\sin\xi$. Следовательно $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to 0$.

Теорема 15.6 (теорема Тейлора). *Теорема 10 на с. 267.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 267–269]. □

Теорема 15.7 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Формула (11.34) на с. 271.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 271]. □

Замечание 15.8. *Формулой Маклорена* называют формулу Тейлора при $a = 0$.
Упражнение 15.9. Разложить функцию $f(x) = e^x$ по формуле Маклорена.
Упражнение 15.10. Разложить функцию $f(x) = \sin x$ по формуле Маклорена.
Упражнение 15.11. Разложить функцию $f(x) = \cos x$ по формуле Маклорена.
Упражнение 15.12. Разложить функцию $f(x) = \ln(1 + x)$ по формуле Маклорена.
Упражнение 15.13. Разложить функцию $f(x) = (1 + x)^c$ по формуле Маклорена.
Упражнение 15.14. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{1+x}$ по формуле Маклорена.
Упражнение 15.15. Разложить функцию $f(x) = \sqrt{1 + x}$ по формуле Маклорена с точностью до $o(x^3)$.
Замечание 15.16. Если $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, то $|\sin x - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})| \leqslant \frac{(\frac{\pi}{4})^7}{7!} < 0.0001$.
Упражнение 15.17. Вычислить значения функций $\sin x$, $x - \frac{x^3}{6}$, $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ при $x = 0.6$.
Упражнение 15.18. Вычислить значения функций $\sin x$, $x - \frac{x^3}{6}$, $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ при $x = 0.2$.

16 Исследование графика функции

[ИК, 11.8–11.13], [Дем, II.8, II.11, II.12].

Исследование функций методами дифференциального исчисления и построение графиков.

Упражнение 16.1. Пусть $f(x) = x^3 - 3x$. Построить графики функций $f(x)$, $f(x)+1$, $f(x+1)$, $2f(x)$, $f(2x)$.
Определение 16.2. Функция f, определённая на интервале (a, b), называется *выпуклой вверх*, если все касательные, проведённые к графику функции f в этом интервале, лежат не ниже графика функции f.
Определение 16.3. Функция f, определённая на интервале (a, b), называется *выпуклой вниз*, если все касательные, проведённые к графику функции f в этом интервале, лежат не выше графика функции f.
Теорема 16.4. *Теорема 14 на с. 282.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 282]. □

Определение 16.5. Точка $(c, f(c))$ называется *точкой перегиба* графика функции f, если в некоторой окрестности числа c слева от c функция f выпукла вверх, а справа вниз или наоборот.
Теорема 16.6. *Теорема 16 на с. 284.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 284]. □

Определение 16.7. Прямая $y = kx + b$ является *асимптотой* графика функции f при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0$. Прямая $y = kx + b$ является *асимптотой* графика функции f при $x \to -\infty$, если $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0$. Прямая $x = a$ является *асимптотой* графика функции f, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.
Замечание 16.8. Для анализа графика функции необходимо определить
- область определения,
- множество значений,
- чётность и нечётность,
- наименьший положительный период,
- точки разрыва,
- нули,
- промежутки знакопостоянства,
- локальные минимумы и максимумы,
- промежутки возрастания и убывания,
- точки перегиба,

- промежутки выпуклости вверх (вниз),
- асимптоты.

Упражнение 16.9. Проанализировать график функции $y = \frac{1}{x^2+1}$.
Упражнение 16.10. Проанализировать график функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Домашнее задание

Упражнение 16.11. Проанализировать график функции $y = \frac{\ln x}{x}$.
Упражнение 16.12. Проанализировать график функции $y = \sqrt[4]{x} - x$.
Упражнение 16.13. Найти такую функцию f, что $f'(x) = \frac{1}{1+2x^2}$.

17 Неопределённый интеграл

[ИК, 12.1], [Дем, III.1].

Неопределённый интеграл. Условия интегрируемости функции. Интегрирование некоторых элементарных функций.

Справка 17.1. Пьер Симон Лаплас (Pierre Simon Laplace) (1749–1827) — французский астроном, математик и физик.
Определение 17.2. С. 292.
Упражнение 17.3. Найти первообра́зную функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0, +\infty)$.
Упражнение 17.4. Найти первообра́зную функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(-\infty, 0)$.
Замечание 17.5. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на интервале (a, b), то для любого числа C функция $F(x) + C$ также является первообразной функции $f(x)$ на интервале (a, b).
Теорема 17.6. *Теорема 1 на с. 293.*
Определение 17.7. С. 293.
Теорема 17.8. *Линейные свойства неопределённого интеграла на с. 294.*
Теорема 17.9. *Таблица на с. 295–296.*
Определение 17.10. Определение *функции Лапласа* Φ на с. 296. Синоним — *гауссов интеграл ошибок*.
Упражнение 17.11. Вычислить $\int e^{-x} dx$.
Упражнение 17.12. Вычислить $\int xe^{-x} dx$.

Домашнее задание

Упражнение 17.13. Вычислить $\int x^2 e^{-x} dx$.
Упражнение 17.14. Вычислить $\int x^3 e^{x} dx$.

18 Основные методы интегрирования

[ИК, 12.2], [Дем, III.1].

Основные правила интегрирования, интегрирование путём замены переменных, по частям.

Теорема 18.1 (интегрирование заменой переменной). *Пусть функция ϕ дифференцируема на интервале (a, b) и на этом интервале $\int g(t)dt = G(t) + C$. Тогда $\int g(\phi(x))\phi'(x)dx = G(\phi(x)) + C$ на интервале (a, b).*

Доказательство. Согласно теореме 11.11 $(G(\phi(x)))' = G'(\phi(x))\phi'(x) = g(\phi(x))\phi'(x)$. □

Упражнение 18.2. Вычислить $\int \cos 5x dx$.
Упражнение 18.3. Вычислить $\int (3x - 7)^{100} dx$.
Упражнение 18.4. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$.
Теорема 18.5 (интегрирование по частям). *Пусть функции u и v дифференцируемы на интервале (a, b) и на этом интервале $\int v(x)u'(x)dx = F(x) + C$. Тогда $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - F(x) + C$ на интервале (a, b).*

Доказательство. Согласно теореме 11.13 $(u(x)v(x) - F(x))' = (u(x)v'(x) + v(x)u'(x)) - v(x)u'(x) = u(x)v'(x)$. □

Замечание 18.6. В качестве функции u целесообразно использовать функции $\ln x$, $(\arcsin x)^n$ и $(\operatorname{arctg} x)^n$.
Упражнение 18.7. Вычислить $\int x^n \ln x dx$.
Упражнение 18.8. Вычислить $\int x \operatorname{arctg} x dx$.
Замечание 18.9. В интегралах $\int (ax+b)^n \sin(cx)dx$, $\int (ax+b)^n \cos(cx)dx$ и $\int (ax+b)^n e^{cx} dx$ в качестве функции u целесообразно использовать $(ax+b)^n$.
Упражнение 18.10. Вычислить $\int x^2 \cos x dx$.
Замечание 18.11. Чтобы вычислить $\int e^{ax} \sin(bx)dx$ или $\int e^{ax} \cos(bx)dx$, интегрируют по частям дважды, полагая $u(x) = e^{ax}$, и находят искомый интеграл из полученного линейного уравнения.
Упражнение 18.12. Вычислить $\int e^{2x} \cos x dx$.

Домашнее задание

Упражнение 18.13. Проанализировать график функции $y = -x \ln x$.
Упражнение 18.14. Вычислить $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^5}{1+x^2} dx$.
Упражнение 18.15. Вычислить $\int e^{\cos x} \sin x dx$.

19 Интегрирование рациональных функций

[ИК, 12.3], [Дем, III.2].

Теорема 19.1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ интеграл $\int \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ можно представить в виде некоторой линейной комбинации функций $\operatorname{arctg} t$ и $\frac{t}{(1+t^2)^k}$, где $k < n$.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 302–303]. □

Упражнение 19.2. Найти такие действительные числа A_0 и A_1, что $(A_0 \operatorname{arctg} t + A_1 \frac{t}{1+t^2})' = \frac{1}{(1+t^2)^2}$ для всех t.
Упражнение 19.3. Найти такие действительные числа A_0, A_1, A_2, что $(A_0 \operatorname{arctg} t + A_1 \frac{t}{1+t^2} + A_2 \frac{t}{(1+t^2)^2})' = \frac{1}{(1+t^2)^3}$ для всех t.
Определение 19.4. Многочлен с действительными коэффициентами называется *приводимым*, если его можно представить в виде произведения двух многочленов более низких степеней (с действительными коэффициентами). Иначе он называется *неприводимым*.
Теорема 19.5. *Пусть P — многочлен от одной переменной с действительными коэффициентами. Если степень многочлена P больше, чем 2, то P является приводимым.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 40–46, 304–307]. □

Теорема 19.6. *Теорема 2 на с. 308.*

Без доказательства. См. [ИК, с. 308–309]. □

Замечание 19.7. Для вычисления интеграла от выражения, составленного из констант, $\sin x$ и $\cos x$ с помощью сложения, вычитания, умножения и деления, можно использовать замену переменной $t = \phi(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. При этом $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\phi'(x) = \frac{1+t^2}{2}$.
Замечание 19.8. Пусть даны целое положительное число n и такие действительные числа a_1, a_2, a_3, a_4, что $a_1 a_4 \neq a_2 a_3$. Для вычисления интеграла от выражения, составленного из констант, x и $\sqrt[n]{\frac{a_1 x + a_2}{a_3 x + a_4}}$ с помощью сложения, вычитания, умножения и деления, можно использовать замену переменной $t = \phi(x) = \sqrt[n]{\frac{a_1 x + a_2}{a_3 x + a_4}}$. При этом $x = \frac{a_4 t^n - a_2}{a_1 - a_3 t^n}$ и $\phi'(x) = \frac{(a_1 - a_3 t^n)^2}{(a_1 a_4 - a_2 a_3) n t^{n-1}}$.

Упражнение 19.9. Вычислить $\int \frac{1}{1-x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$.

Замечание 19.10. Для вычисления интеграла от выражения, составленного из констант, x и $\sqrt{x^2+1}$ с помощью сложения, вычитания, умножения и деления, можно использовать замену переменной $t = \phi(x) = \sqrt{x^2+1} + x$. При этом $x = \frac{t^2-1}{2t}$ и $\phi'(x) = \frac{2t^2}{t^2+1}$.
Замечание 19.11. Для вычисления интеграла от выражения, составленного из констант, x и $\sqrt{x^2-1}$ с помощью сложения, вычитания, умножения и деления, можно использовать замену переменной $t = \phi(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$. При этом $x = \frac{2t}{t^2-1}$ и $\phi'(x) = -\frac{(t^2-1)^2}{4t}$. Здесь интеграл рассматривается в интервале $(-\infty, -1)$ или $(1, +\infty)$.

Упражнение 19.12. Вычислить $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x-2x^2}}$.
Упражнение 19.13. Вычислить $\int \frac{dx}{x\ln x}$.
Упражнение 19.14. Вычислить $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$.
Упражнение 19.15. Вычислить $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.
Упражнение 19.16. [Бер] № 1560–1683.

Домашнее задание

Упражнение 19.17. Вычислить $\int \frac{dx}{1+e\cos x}$.
Упражнение 19.18. Вычислить $\int \frac{2t}{1+t^2}dt$.

20 Определённый интеграл

[ИК, 13.1, 13.2], [Дем, IV.1].

Интегральная сумма, определённый интеграл. Классы интегрируемых функций.

Определение.
Теорема: интегрируемая функция ограниченна.
Теорема: непрерывная функция интегрируема.
Теорема: монотонная функция интегрируема.
Определение кусочно-непрерывной функции.
Теорема: кусочно-непрерывная функция интегрируема.

Упражнение 20.1. Вычислить $\int\limits_0^e \lfloor x\rfloor dx$.

Домашнее задание

Упражнение 20.2. Вычислить $\int \frac{dx}{x(x+1)}$.
Упражнение 20.3. Вычислить $\int \frac{2t}{(1+t^2)^n}dt$, где $n \geqslant 2$.
Упражнение 20.4. Вычислить $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

21 Вычисление определённых интегралов

[ИК, 13.3–13.5], [Дем, IV.2].

Свойства определённых интегралов. Формула Ньютона–Лейбница.

Свойство 1 на с. 329.
Свойство 2 на с. 329.
Свойство 3 на с. 330.
Свойство 4 на с. 331.
Свойство 6 на с. 332.
Свойство 9 на с. 334.
Теорема 5 на с. 337.
Замечание на с. 338.

Упражнение 21.1. Вычислить $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\,dx$.

Упражнение 21.2. Вычислить $\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx$.

Упражнение 21.3. Вычислить $\int\limits_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$.

Упражнение 21.4. Вычислить $\int\limits_0^{b} e^{-x}dx$.

Упражнение 21.5. Вычислить $\lim\limits_{b\to+\infty}(1-e^{-b})$.

Домашнее задание

Упражнение 21.6. Вычислить $\int\limits_0^b xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

22 Приложения определённого интеграла

[ИК, 13.6], [Дем, IV.5].

Приложения определённого интеграла.

Теорема 6 на с. 343.
Вычисление объёма тела вращения (с. 346).
Теорема 7 на с. 347.

23 Несобственный интеграл

[ИК, 13.8], [Дем, IV.4].

Понятие о несобственных интегралах.

Определение несобственного интеграла первого рода на с. 355.

Упражнение 23.1. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$.

Определение несобственного интеграла второго рода на с. 356.

Теорема 23.2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

Без доказательства. См. [ИК, с. 440–441]. Обозначим $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$. Тогда

$$I^2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)\cdot\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\right) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy.$$

Сделаем замену $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. При этом $\left|\frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi} - \frac{\partial y}{\partial r}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right| = |\cos\varphi\cdot(r\cos\varphi) - \sin\varphi\cdot(-r\sin\varphi)| = r$. Поэтому

$$I^2 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}{2}}\,r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr\right)d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} 1\,d\varphi = 2\pi.$$

□

24 Числовой ряд

[ИК, 17.1], [Дем, V.1].

Числовой ряд, частичная сумма, сходимость ряда, сумма ряда. Необходимое условие сходимости числового ряда. Критерий Коши сходимости ряда.

Определение на с. 444.
Пример 1 на с. 445.
Пример 2 на с. 445.

Упражнение 24.1. Вычислить $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$, где $0 < q < 1$.

Упражнение 24.2. Вычислить $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$.

Упражнение 24.3. Вычислить $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

Упражнение 24.4. Вычислить $1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \ldots$.

Упражнение 24.5. Вычислить $\frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \ldots$.

Теорема 1 на с. 446.

Упражнение 24.6. Сходится ли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$?

Следствие 1 на с. 446.

Домашнее задание

25 Знакопостоянный ряд

[ИК, 17.2], [Дем, V.1].

Ряды с неотрицательными членами, критерий сходимости таких рядов, теорема сравнения.
Признаки Коши и Даламбера.
Интегральный признак сходимости числовых рядов.

Справка 25.1. Жан Лерон Д'Аламбер (Jean Le Rond D'Alembert) (1717–1783) — французский математик и философ.

Теорема 2 на с. 448.

Теорема 3 на с. 448.

Упражнение 25.2. Сходится ли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, где $0 < \alpha \leqslant 1$?

Упражнение 25.3. Сходится ли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, где $\alpha > 1$?

Теорема 6 II на с. 452.

Теорема 7 II на с. 452.

Упражнение 25.4. Сходится ли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}^k}{k!}$?

Домашнее задание

Упражнение 25.5. Сходится ли ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$?

Упражнение 25.6. Сходится ли ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i}$?

26 Знакопеременный ряд

[ИК, 17.3], [Дем, V.2–V.3].

Абсолютная и условная сходимости рядов. Признак Вейерштрасса абсолютной сходимости ряда. Сочетательное и переместительное свойства абсолютно сходящихся рядов.

Определение 1 на с. 455.

Теорема 8 на с. 455.

Определение 2 на с. 455.

Упражнение 26.1. Вычислить $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2^k}$.

Теорема 26.2 (признак Лейбница). *Пусть последовательность $\{\alpha_n\}$ является невозрастающей и бесконечно малой. Тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\alpha_i$ сходится.*

Доказательство. См. [ИК, с. 456]. □

Утверждение 2 на с. 457.

27 Функциональный ряд

[ИК, 17.4], [Дем, V.4, V.5].

Функциональный ряд и его область сходимости. Почленное дифференцирование рядов. Степенные ряды. Радиус и область сходимости степенного ряда.

Определение функционального ряда на с. 458.
Теорема 10 на с. 459.
Теорема 11 на с. 462.
Теорема 14 на с. 467.
Утверждение IV на с. 470.

Упражнение 27.1. Вычислить $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-m}$, где $\lambda > 0$.

Упражнение 27.2. Вычислить $\sum\limits_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m}{m!} e^{-m}$, где $\lambda > 0$ (математическое ожидание случайной величины, распределённой по закону Пуассона).

Упражнение 27.3. Вычислить $\sum\limits_{m=0}^{\infty} m(m-1) \frac{\lambda^m}{m!} e^{-m}$, где $\lambda > 0$.

Упражнение 27.4. Вычислить $\sum\limits_{m=0}^{\infty} m^2 \frac{\lambda^m}{m!} e^{-m}$, где $\lambda > 0$.

Упражнение 27.5. Вычислить $\sum\limits_{m=0}^{\infty} (m-\lambda)^2 \frac{\lambda^m}{m!} e^{-m}$, где $\lambda > 0$.

Упражнение 27.6. Вычислить $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$, где $0 < x < 1$.

Упражнение 27.7. Вычислить $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kx^{k-1}$, где $0 < x < 1$.

Упражнение 27.8. Вычислить $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}$, где $0 < x < 1$.

Упражнение 27.9. Вычислить $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (1-a)a^k$, где $0 < a < 1$.

Упражнение 27.10. Вычислить $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k(1-a)a^k$, где $0 < a < 1$.

Упражнение 27.11. Вычислить $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2(1-a)a^k$, где $0 < a < 1$.

Упражнение 27.12. Вычислить $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (k - \frac{a}{1-a})^2(1-a)a^k$, где $0 < a < 1$.

28 Формула Стирлинга

[ИК, с. 489–494], [Дем, V.10].

Справка 28.1. Джеймс Стирлинг (James Stirling) (1692–1770) — шотландский математик.
Теорема 28.2 (формула Стирлинга). $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}} = 1$.

Без доказательства. См. [ИК, с. 489–494]. □

Упражнение 28.3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln(n!) - (\ln(\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{2}\ln n + n\ln n - n))$.

29 Ряд Фурье

[ИК, 17.5], [Дем, V.6, V.7, V.10].

Тригонометрические ряды. Ряды Фурье.

Справка 29.1. Жан Батист Жозеф Фурье (Jean Baptiste Joseph Fourier) (1768–1830) — французский математик.

Тригонометрический ряд Фурье на с. 477.

Теорема 18 на с. 483. (Проще: пусть существуют левый и правый пределы $f(x)$, а также левый и правый пределы $f'(x)$.)

Упражнение 29.2. Вычислить $\int\limits_0^\pi x\cos(8x)\,dx$.

Упражнение 29.3. Вычислить $\int\limits_0^\pi x\cos(5x)\,dx$.

Упражнение 29.4. Вычислить $\int\limits_{-\pi}^0 x\cos(5x)\,dx$.

Упражнение 29.5. Вычислить $\int\limits_0^\pi x^2\cos(kx)\,dx$.

Упражнение 29.6. Найти тригонометрический ряд Фурье функции f с периодом 2π, определённой на множестве $[-\pi,\pi)$ так: $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-x, & \text{если } 0\leqslant x<\pi,\\ \frac{\pi}{2}+x, & \text{если } -\pi\leqslant x<0.\end{cases}$.

Упражнение 29.7. Найти тригонометрический ряд Фурье функции f с периодом 2π, определённой на множестве $[-\pi,\pi)$ так: $f(x)=\begin{cases}\pi, & \text{если } 0\leqslant x<\pi,\\ -\pi, & \text{если } -\pi\leqslant x<0.\end{cases}$.

Упражнение 29.8. Найти тригонометрический ряд Фурье функции f с периодом 2π, определённой на множестве $[-\pi,\pi)$ так: $f(x)=x^2$.

Упражнение 29.9. Вычислить $\sum\limits_{m=0}^\infty \frac{1}{(2m+1)^2}$.

Упражнение 29.10. Вычислить $\sum\limits_{m=0}^\infty \frac{\cos(2m+1)}{(2m+1)^2}$.

Упражнение 29.11. Вычислить $\sum\limits_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{2m+1}$.

Упражнение 29.12. Вычислить $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{8}{(4n+1)(4n+3)}$.

Упражнение 29.13. Вычислить $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$.

Упражнение 29.14. Вычислить $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2}$.

Список литературы

[Бер] *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа для втузов. М.: ОГИЗ, 1947.

[Дем] *Демидович Б. Н.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990. [С. 7–167, 172–197, 204–239, 246–300, 404–405.]

[Дор] *Дорофеева А. В.* Учебник по высшей математике для философских факультетов университетов. М.: Изд-во МГУ, 1971.

[ЗУМ] Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б. Н. Демидовича. М.: Наука, 1978. [Гл. I, II, IV, V, VII.]

[Зор] *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 1–2. М.: Наука, 1981–1984. [Т. 1, с. 33–258, 283–393; т. 2, с. 587–697.]

[ИК] *Ильин В. А., Куркина А. В.* Высшая математика. М.: Проспект, 2002. –592 с. [Гл. 1, 7–13, 17.]

[ИСС] *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. М.: Наука, 1979.

[КФ] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

[Куд] *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 1, 2. М.: Высшая школа, 1981. [Т. 1, с. 15–182, 201–247, 378–389, 511–517, 545–648; т. 2, с. 343–352, 390–391.]

[ЛПФШ] *Лунгу К. Н., Письменный С. Н., Федин С. Н., Шевченко Ю. А.* Сборник задач по высшей математике. 2-е изд., испр. М.: Айрис-пресс, 2003. 576 с.

[Ник] *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1, 2. М.: Наука, 1990. [С. 15–204, 361–367, 453–459, 476–499.]

[Фих] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1–2. СПб.: Лань, 1997. [Т. 1, с. 11–324; т. 2, с. 11–36, 108–116, 169–224, 257–329, 364–374, 419–447.]

[Wac] *Wachsmuth B. G.* Interactive Real Analysis (online textbook). 1994. `http://www.sgu.edu/projects/reals/`