

Алгебра

(план курса)

М. Р. Пентус

1 Множества, отображения, факторизация

1.1 *Ложная посылка

Релятивизованный квантор по пустому множеству.

1.2 *Математическая индукция

[7, 21], [3, 1.7]

Наименьшее натуральное число — 0.
Возвратная индукция.

1.3 Множества и операции над ними

[3, 1.5.1], [20, 4.1—4.4], [7, 7, 11—14], [11, 1.1.1—1.1.3, 1.1.8.1—1.1.8.26], [12, II.1—II.5], [19, 1.1—1.3]

Упорядоченная пара, декартово произведение.

1.4 Отображения и их свойства

[5, 1.4—1.6], [3, 1.5.2], [20, 5.9, 5.10], [7, 15—19], [21, II.1], [11, 1.1.4, 1.1.8.36—1.1.8.38], [19, 1.6], [10, 9]

Соответствие, область отправления, область прибытия. Функция.

Инъективность, сюръективность. Биекция. Образ и прообраз множества при отображении. Композиция отображений. Сохранение свойств инъективности и сюръективности при композиции. Обратное отображение.

Бинарная операция (на непустом множестве), унарная операция.

1.5 *Мощность множества

[20, 6.1—6.6], [7, 8—10], [11, 1.1.5, 1.1.8.39, 1.1.8.42]

Сравнение мощностей. Теорема Кантора—Бернштейна (без доказательства). Счётные множества, их свойства. Теорема Кантора. Примеры несчётных множеств.

1.6 Бинарные отношения

[20, 5.1, 5.2, 5.4, 5.5, 5.7], [11, 1.1.3, 1.1.4, 1.1.8.27—1.1.8.35], [3, 1.6.1, 1.6.4], [22, I.1—I.6], [19, 1.5, 1.8, 1.9], [7, 20, 21]

Рефлексивные, симметричные, транзитивные отношения.

Строгий/нестрогий частичный/линейный порядок.

Предикаты как подмножества и как отображения в $\{И, Л\}$.

1.7 Отношение эквивалентности

[20, 5.4, 5.6], [11, 1.1.4], [3, 1.6.2], [22, II.1—II.4], [19, 1.7]

Отношение равнообразности как общий вид отношения эквивалентности. Фактор-множество и фактор-функция.

2 Простейшие алгебраические структуры

2.1 Алгебраические структуры (алгебраические системы)

[3, 4.1.1], [5, 1.1], [19, 2.1.1], [7, 4], [10, 1]

Количество n -местных операций на m -элементном множестве. 0-местная операция. n -местное отношение.

2.2 Полугруппы и моноиды

[3, 4.1.2—4.1.4], [5, 1.2, 1.3, 1.7], [21, II.2], [19, 2.3.1, 2.3.2], [6, I.3.1, I.3.2, I.6.1]

Коммутативность, ассоциативность, полугруппа.

Пример полугруппы: $\langle \{1, 3, 7\}, \circ \rangle$, где $x \circ y = x$.

Пример полугруппы: $\langle \{u, p, z, c, \varepsilon\}, \vee \rangle$, где

$\vee$	u	p	z	c	ε
u	u	u	u	u	u
p	u	p	u	u	p
z	u	u	z	u	z
c	u	u	u	c	c
ε	u	p	z	c	ε

Пример полугруппы: $\langle \{1, 3, 7\}, \circ \rangle$, где $x \circ y = x$.

Рассмотрим полугруппу $\langle A, \circ \rangle$.

Элемент e называется *левой единицей*, если $(\forall x \in A) e \circ x = x$.

Элемент o называется *левым нулём*, если $(\forall x \in A) o \circ x = o$.

Правая единица, двусторонняя единица (обычно просто *единица* или *нейтральный элемент*), *Правый нуль, двусторонний нуль* (обычно просто *нуль*).

Если e_1 — левая единица и e_2 — правая единица, то $e_1 = e_2$.

Если существует двусторонняя единица, то она единственна.

Если существует двусторонний нуль, то он единствен.

Моноидом называется полугруппа с единицей.

Элемент a называется *идемпотентом*, если $a \circ a = a$.

Если e — единица и $a \circ b = e$, то a называется *левым обратным элементом* для b и b называется *правым обратным элементом* для a .

Если e — единица, $a \circ b = e$ и $b \circ a = e$, то b называется *обратным элементом* для a .

Элемент a называется *обратимым*, если существует обратный элемент для a .

Обратимый слева и справа является обратимым (с доказательством).

Теорема 2.1 (обобщённая ассоциативность). (5, 1.3.2.)

(6, I.3.2.)

2.3 Свободные полугруппы и моноиды

[6, I.6.2], [21, II.2]

Слово над алфавитом, пустое слово.

3 Группы

3.1 Группы

[6, I.2.1—I.2.3], [3, 4.2.1, 4.2.2], [5, 1.9], [21, II.3], [10, 2—5, 8], [12, V.12, V.13], [18, IV.1.1, IV.1.4], [19, 2.3.3], [7, 59]

Определение 3.1. *Группой* называется моноид, в котором каждый элемент обратим.
(5, 1.9.1.)

Лемма 3.2 (единственность нейтрального элемента в группе). (5, 1.2.6.)

Лемма 3.3 (единственность обратных элементов в группе). (5, 1.2.12.)

Определение 3.4. *Абелева группа.*

(5, 1.9.2.)

(6, I.3.3.)

Определение 3.5. *Порядком* конечной группы называется количество элементов этой группы.

Определение 3.6. *Подгруппа.*

(6, I.4.1.)

(5, с. 22.)

Лемма 3.7. (5, 1.9.14.)

Теорема 3.8. (5, 1.9.15.)

Теорема 3.9. (5, 1.9.16.)

3.2 Группа движений

[6, I.2.2], [3, с. 309]

3.3 Группа симметрий правильного многоугольника (группа диэдра)

[3, с. 327—329], [10, с. 76—77]

3.4 Возможность деления слева и справа в группе

[6, I.3.1], [18, IV.1.1], [5, с. 17], [19, 2.3.3]

Теорема 3.10. (5, 1.9.3.)

Законы сокращения слева и справа. Эквивалентные определения группы.

3.5 Степень и порядок элемента группы

[3, 4.2.3], [5, с. 21—22], [6, I.3.2], [18, IV.1.4], [10, 4, 5]

Определение 3.11. (5, 1.9.7.)

Теорема 3.12. (5, 1.9.9.)

(6, I.3.2.)

Теорема 3.13. (5, 1.9.10.)

(6, I.3.2.)

Определение 3.14. *Порядок* элемента.

(5, с. 21.)

(6, I.3.2.)

Теорема 3.15. (5, 1.9.12.)

Теорема 3.16. (5, 1.9.13.)

Тождества в группах. Свойства элементов конечного порядка.

3.6 Группа преобразований множества

[3, 4.2.4], [6, I.1.1, I.1.2, I.4.1], [5, 5.0, 5.1], [12, V.12], [21, II.3], [10, 9, 10], [18, I.1.1, IV.1.1, IV.1.9]

Теорема 3.17. *Биекции на фиксированном множестве образуют группу.*

(5, 5.0.4.)

(6, I.4.1.)

Определение 3.18. *Подстановка.*

(5, с. 110.)

(6, I.1.1.)

Определение 3.19. *Группа подстановок n элементов (симметрическая группа).*

(5, с. 110.)

(6, I.1.2.)

Теорема 3.20 (мощность группы подстановок). *Число подстановок n элементов равно $n!$.*

(5, 5.1.1, 5.1.2.)

Определение 3.21. *Цикл.*

(5, с. 112.)

(6, I.1.3.)

Теорема 3.22. *Если $n > 2$, то группа S_n некоммутативна.*

3.7 Разложение подстановок в произведение независимых циклов

[5, 5.3], [3, 4.2.4], [6, I.1.3], [21, II.3], [18, IV.1.9], [10, 10]

Теорема 3.23 (единственность разложения подстановок в произведение независимых циклов). (5, 5.3.1.)

(6, I.1.3.)

3.8 Разложение подстановок в произведение транспозиций

[5, 5.2], [3, 4.2.4], [6, I.1.3], [21, II.3], [10, 13], [18, IV.1.9]

Определение 3.24. *Транспозицией* называется цикл длины 2.

(5, с. 115.)

(6, I.1.3.)

Теорема 3.25. (5, 5.2.4.)

(6, I.1.3.)

3.9 Чётные и нечётные подстановки

[5, 5.4, 5.5], [3, 4.2.4], [21, II.3], [10, 13], [6, I.1.3]

Определение 3.26. *Инверсия.*

(5, с. 118.)

Теорема 3.27 (изменение чётности подстановки при умножении на транспозицию).

(5, 5.4.2.)

Теорема 3.28 (чётность произведения подстановок). (5, 5.5.1.)

Теорема 3.29 (чётность обратной подстановки). (5, 5.4.5.)

Теорема 3.30. (5, 5.5.3.)

Теорема 3.31. (5, 5.5.4.)

Теорема 3.32. (5, 5.5.5.)

3.10 Знакопеременная группа (группа чётных подстановок)

[5, 5.5], [21, II.3], [10, 13]

Теорема 3.33. (5, 5.5.6.)

Теорема 3.34 (порядок знакопеременной группы). (5, 5.4.3.)

3.11 Изоморфизм групп

[3, 4.3.1], [5, 1.9], [6, I.5.1], [10, 9], [18, IV.1.2], [19, 2.2.2]

Биекция, сохраняющая бинарную операцию. Биекция, сохраняющая унарную операцию, нульарную операцию.

Определение 3.35 (изоморфизм групп). (5, 1.9.30.)

Лемма 3.36. (5, 1.9.32.)

Теорема 3.37. (5, 1.9.33.)

Свойства изоморфизмов групп. Сохранение нейтрального и обратных элементов при изоморфизме.

Аutomорфизм.

3.12 Вложение группы в группу преобразований

[3, 4.3.1], [21, II.3], [10, 10]

Любая группа изоморфна некоторой подгруппе группы преобразований (её носителя). Теорема Кэли.

3.13 Циклические группы

[3, 4.2.3], [5, с. 18—19, 24], [6, I.4.1], [12, V.13], [21, II.3], [10, 5], [18, IV.1.4]

Определение циклической группы и её порождающего элемента. Любая подгруппа циклической группы является циклической.

Определение 3.38. *Группа вычетов по модулю n .*

(5, 1.9.4.)

Определение 3.39. *(a).*

(5, с. 23.)

(6, I.4.1.)

Лемма 3.40. (5, 1.9.19.)

Определение 3.41. *Циклическая группа.*

(5, с. 24.)

(6, I.4.1.)

Классификация циклических групп. Описание порождающих элементов в конечных и бесконечных циклических группах.

3.14 *Прямое произведение групп

[3, 7.3.4], [6, I.4.3]

3.15 Смежные классы по подгруппе

[3, 4.3.4], [6, I.4.2], [21, II.3], [10, 11], [18, IV.1.6]

Разбиение группы на смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа. Любая группа простого порядка является циклической. Индекс подгруппы.

3.16 Нормальная подгруппа

[21, II.3], [18, IV.1.7], [10, 11], [3, 4.3.2], [5, 5.3], [6, I.4.2]

Определение 3.42 (сопряжённый элемент). (5, с. 116.)

Теорема 3.43. *Отношение сопряжённости является отношением эквивалентности.*

(5, с. 116.)

Сопряжённая подгруппа. Эквивалентные определения нормальной подгруппы. Подгруппа индекса два нормальна. Центр группы является нормальной подгруппой. Знакопеременная группа является нормальной подгруппой группы подстановок.

3.17 Гомоморфизм групп

[3, 4.3.2, 4.3.3], [5, 1.9], [6, I.5.2], [21, II.3], [10, 9], [18, IV.1.3], [19, 2.2.1]

Определение 3.44. *Гомоморфизм групп.*

(5, с. 25.)

3.18 Факторгруппа

[3, 1.6.3, 4.3.2, 4.4.4], [6, I.4.2], [21, II.3], [10, 11], [18, IV.1.8]

Определение 3.45. *Образ* гомоморфизма.

(5, с. 25.)

(6, I.5.2.)

Определение 3.46. *Ядро* гомоморфизма.

(5, с. 25.)

(6, I.5.2.)

Теорема 3.47. (5, 1.9.27.)

Лемма 3.48. (5, 1.9.28.)

Лемма 3.49. (5, 1.9.29.)

Факторгруппы по нормальной подгруппе. Ядро гомоморфизма является нормальной подгруппой.

3.19 Теорема о гомоморфизме

[3, 7.3.1], [21, II.3]

Естественный гомоморфизм.

3.20 *Свободные группы

[11, 2.2.5]

4 Кольца и поля

4.1 Кольца

[5, 1.10], [6, II.1.1], [3, 4.4.1], [21, II.4], [18, IV.2.1], [19, 2.4.1]

Определение 4.1 (кольцо (ассоциативное кольцо с единицей)). Ассоциативным кольцом с единицей (или просто *кольцом*) называется непустое множество R с двуместными операциями $+$ и $\cdot$, одноместной операцией $-$ и нульместными операциями 0 и 1 , где выполняются следующие тождества:

- 1) $a + b = b + a$,
- 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$,
- 3) $a + 0 = a$,
- 4) $a + (-a) = 0$,
- 5) $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$,
- 6) $c \cdot (a + b) = (c \cdot a) + (c \cdot b)$,
- 7) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
- 8) $a \cdot 1 = a$,
- 9) $1 \cdot a = a$.

Операция $+$ называется *сложением*, операция $\cdot$ называется *умножением*.

(5, с. 28.)

Замечание 4.2. При записи выражений принято опускать некоторые скобки (для удобства). Если в сокращённой записи рядом находятся разные операции, то при отсутствии скобок внутренней считается та, которая имеет более высокий приоритет согласно следующему списку, составленному в порядке убывания приоритетов: двуместная операция $\cdot$, одноместная операция $-$, двуместная операция $+$.

Замечание 4.3. Знак операции $\cdot$ часто опускают.

Пример 4.4 (кольцо целых чисел). (5, 1.10.2.)

(3, с. 173.)

Пример 4.5 (кольцо квадратных матриц порядка n над $\mathbb{R}$). (3, с. 174.)

(5, 8.5.1.)

Пример 4.6 (кольцо функций).

(3, с. 174.)

Пример 4.7 (кольцо непрерывных функций). (5, 1.10.2.)

Определение 4.8 (коммутативное кольцо). Кольцо называется *коммутативным*, если умножение коммутативно. (3, с. 173.)

Определение 4.9. Введём сокращение $a - b \rightleftharpoons a + (-b)$. Двуместная операция $-$ имеет тот же приоритет, что и операция $+$. Обе операции считаются левоассоциативными (например, если в выражении рядом находятся две бинарные операции $-$, то при отсутствии скобок внутренней считается та, которая находится левее).

(6, с. 95.)

Лемма 4.10. В любом кольце выполняются следующие тождества:

$$1. a \cdot 0 = 0;$$

$$2. 0 \cdot a = 0;$$

$$3. (-a) \cdot b = -(a \cdot b);$$

$$4. a \cdot (-b) = -(a \cdot b);$$

$$5. (-a) \cdot (-b) = a \cdot b;$$

$$6. (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c;$$

$$7. c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b.$$

(5, с. 30.)

(6, с. 95.)

(3, с. 175.)

Определение 4.11 (тривиальное кольцо, или нулевое кольцо). Кольцо называется *тривиальным* или *нулевым*, если оно содержит только один элемент.

(6, с. 96.)

Лемма 4.12. В любом нетривиальном кольце $0 \neq 1$.

(3, с. 175.)

Лемма 4.13 (бином Ньютона). Пусть R — кольцо, $a \in R$, $b \in R$, $ab = ba$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

(5, 1.10.3.)

(3, с. 56—57, 176.)

Определение 4.14 (подкольцо). Подмножество S кольца R называется *подкольцом*, если

$$1. 0 \in S,$$

$$2. 1 \in S,$$

$$3. -a \in S \text{ для всех } a \in S,$$

$$4. a + b \in S \text{ для всех } a \in S \text{ и } b \in S,$$

$$5. a \cdot b \in S \text{ для всех } a \in S \text{ и } b \in S.$$

(5, 1.10.4.)

Определение 4.15 (гомоморфизм колец). (5, с. 36.)

(3, с. 178.)

Определение 4.16 (изоморфизм колец). (5, с. 37.)

(3, с. 179.)

4.2 *Делители нуля

[6, II.1], [5, 1.10], [3, 4.4.5]

Определение 4.17 (левый делитель нуля, правый делитель нуля). (5, 1.10.8.)

4.3 Поля

[5, 1.11], [3, 4.4.5, 4.4.6], [21, II.4], [18, IV.3.1], [19, 2.4.3], [6, II.1]

Определение 4.18 (тело). Кольцо R называется *телом*, если для каждого $a \in R$, отличного от нуля, существует такой элемент b , что $ab = 1$ и $ba = 1$.

(6, с. 96.)

(3, с. 185.)

Замечание 4.19. Если $ab = 1$ и $ba = 1$, то элемент b можно обозначить a^{-1} .

Определение 4.20 (поле). *Поле* называется телом, где умножение коммутативно.

(5, 1.11.1.)

(3, с. 185.)

Пример 4.21 (поле рациональных чисел). (6, с. 97.)

Пример 4.22 (поле действительных чисел). (6, с. 97.)

Определение 4.23. Введём сокращение $a/b \doteq a \cdot (b^{-1})$.

(3, с. 185.)

Лемма 4.24 (решение линейного уравнения). Пусть K — поле, $a \in K$, $b \in K$, $a \neq 0$. Тогда существует один и только один такой элемент $x \in K$, что $ax = b$. (5, 1.11.2.)

Лемма 4.25 (действия с дробями). (3, с. 185—186.)

Определение 4.26 (подполе). Подмножество S поля K называется *подполем*, если

1. $0 \in S$,
2. $1 \in S$,
3. $-a \in S$ для всех $a \in S$,
4. $a + b \in S$ для всех $a \in S$ и $b \in S$,
5. $a \cdot b \in S$ для всех $a \in S$ и $b \in S$,
6. $-a \in S$ для всех $a \in S$ отличных от нуля.

(3, с. 186.)

Лемма 4.27 (пересечение подполей). (5, 1.11.8.)

Пример 4.28. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

(6, с. 97.)

(5, 1.11.9.)

(3, с. 186.)

Определение 4.29 (характеристика поля). Если порядок элемента 1 в аддитивной группе поля K конечен, то этот порядок называется *характеристикой* поля K . Если порядок элемента 1 в аддитивной группе поля K бесконечен, то характеристикой поля K считается натуральное число 0. Характеристика поля K обозначается $\text{char}(K)$.

(5, 1.11.10.)

Теорема 4.30. Пусть K — поле и $\text{char}(K) > 0$. Тогда $\text{char}(K)$ — простое число. (5, 1.11.12.)

Определение 4.31 (изоморфизм полей). (3, с. 186.)

4.4 Поле комплексных чисел

[3, 5.1], [5, 2.0—2.11], [6, с. 97—98], [21, II.4], [15, 10.1]

Определение 4.32 (поле комплексных чисел). (5, 2.1, 2.2.)
(6, с. 97—98.)
(3, 5.1.1, 5.1.2.)

Определение 4.33 (сопряжение). (5, с. 60.)
(3, с. 197.)

Теорема 4.34. (5, 2.3.1.)
(3, с. 197.)

Определение 4.35 (полярные координаты). (5, 2.4.)
(3, с. 198.)

Теорема 4.36. (5, 2.7.1.)
(3, с. 199.)

4.5 Кольца многочленов

[3, 5.2], [5, 1.13], [6, II.1.1]

Определение 4.37 (кольцо многочленов). (5, с. 38—39.)
(5, с. 206—210.)
(6, с. 93.)

4.6 Кольцо вычетов

[3, 4.4.2], [5, 1.10], [21, II.4]

Определение 4.38 (сравнение по модулю m). Два целых числа a и b называются *сравнимыми* по модулю m , если $(a - b) \vdots m$. При этом пишут $a \equiv b \pmod{m}$.
(3, с. 176.)

Лемма 4.39. Отношение сравнимости по модулю m является отношением эквивалентности.

Лемма 4.40. Отношение сравнимости по модулю m является конгруэнцией на кольце целых чисел.
(3, с. 177.)

Определение 4.41 (кольцо вычетов). (5, 1.10.2.)
(3, с. 177.)

4.7 Поле вычетов по простому модулю

[3, 4.4.6], [5, 1.11], [21, II.4]

Теорема 4.42. (5, 1.11.6.)
(3, с. 189.)

4.8 *Малая теорема Ферма

[3, 4.4.6]

Теорема 4.43 (малая теорема Ферма). (3, с. 189.)

5 *Другие алгебраические структуры

5.1 *Полукольца

5.2 *Решётки

[21, II.8], [18, IV.5.1—IV.5.4], [19, 2.6]

6 Элементы линейной алгебры

6.1 Векторное пространство (арифметическое линейное пространство)

[3, 2.1.1—2.1.3], [5, 4.0, 4.1, 9.1]

6.2 Линейная зависимость векторов

[3, 2.1.4], [5, 9.2]

6.3 Базис и размерность векторного пространства

[3, 2.1.5], [5, 9.3]

6.4 Линейные преобразования

[3, 2.3.1], [12, V.11]

6.5 Матрицы, действия над ними

[3, 1.3.1, 2.3], [11, 1.1.5], [5, 8.1, 8.2, 8.4, 8.5], [12, V.1—V.4], [21, I.1, I.3], [18, II.1.1], [15, 1.1]

6.6 Формула для вычисления элементов обратной матрицы

[5, 8.7], [3, 3.3.1], [21, I.3]

6.7 Ранг матрицы

[5, 9.16], [3, 2.2.2, 2.4.3, 3.3.2], [21, I.3], [18, I.2.4], [15, 1.3]

6.8 Приведение матрицы к ступенчатому виду

[5, 3.4, 3.5], [21, I.1], [18, I.2.4]

Элементарные преобразования строк матрицы.

6.9 Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований

[5, 8.8], [21, I.3], [18, II.1.2]

6.10 Определители квадратных матриц

[5, 6.1—6.6], [3, 1.4, 3.1, 3.2], [21, I.2], [18, I.1.2, I.1.3], [15, 1.2]

6.11 Вычисление определителей

[5, 6.8], [3, 4.3.5], [21, I.2], [18, I.1.4—I.1.6]

Вычисление определителей разложением по строке или столбцу и с помощью элементарных преобразований.

6.12 Системы линейных уравнений

[5, 3.0—3.2], [3, 1.3], [12, V.5], [21, I.1], [18, I.2.1], [15, 2.1]

6.13 Метод Гаусса решения систем

[5, 3.3, 3.6—3.8], [3, 1.3.4], [21, I.1], [18, I.2.2], [15, 2.1]

6.14 Метод Крамера решения систем

[21, I.1], [18, I.2.3], [15, 2.2]

6.15 Теорема Кронекера—Капелли

[3, 2.2.3], [21, I.3], [18, I.2.5], [15, 2.1]

6.16 Теорема об общем решении однородной и неоднородной систем

[5, 4.2, 9.17], [3, 2.4.1, 2.4.2], [18, I.2.6, I.2.7], [15, 2.3]

Основная литература

- [1] *Александров П. С.* Введение в теорию групп. Библиотека “Квант”, выпуск 7. М.: Наука, 1980. [С. 5—65, 85—115.]
- [2] *Алексеев В. Б.* Теорема Абеля в задачах и решениях. М.: Наука, 1976.
- [3] *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. М.: Наука, 1977. [С. 38—47, 133—167, 171—181.]
- [4] *Ляпин Е. С., Айзенштат А. Я., Лесохин М. М.* Упражнения по теории групп. М.: Наука, 1976. [С. 9—81, 98—111.]
- [5] *Михалёв А. А., Михалёв А. В.* Начала алгебры, часть I. — М.: ИНТУИТ, 2005. — 258 с.
- [6] *Фрид Э.* Элементарное введение в абстрактную алгебру. М.: Наука, 1979. [С. 11—81, 92—99.]

Дополнительная литература

- [7] *Болтянский В. Г., Савин А. П.* Беседы о математике. Книга 1. Дискретные объекты. — М.: ФИМА, МЦНМО, 2002. — 368 с.
- [8] *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976. [С. 15—55.]
- [9] *Виленкин Н. Я.* Алгебра и теория чисел. М.: Наука, 1984. [С. 63—73, 102—117.]
- [10] *Гроссман И., Магнус В.* Группы и их графы. — М.: Мир, 1971. — 248 с.
- [11] *Капитонова Ю. В. и др.* Лекции по дискретной математике / Авторы: Ю. В. Капитонова, С. Л. Кривой, А. А. Летичевский, Г. М. Луцкий. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 624 с.
- [12] *Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж.* Введение в конечную математику. — М.: Мир, 1965. — 486 с.
- [13] *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973. [С. 11—20, 33—58, 72—78.]
- [14] *Ленг С. Е.* Алгебра. М.: Мир, 1968. [С. 21—31.]
- [15] *Лунгу К. Н. и др.* Сборник задач по высшей математике / Авторы: К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. — М.: Айрис-пресс, 2003. — 576 с.
- [16] *Ляпин Е. С., Евсеев А. Е.* Алгебра и теория чисел. М.: Просвещение, 1974. [С. 337—361, 365—370.]
- [17] *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1975. [С. 10—123.]
- [18] *Мишина А. П., Проскуряков И. В.* Высшая алгебра. — М.: Физматлит, 1962. — 300 с.
- [19] *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов. — СПб.: Питер, 2000. — 304 с.
- [20] *Пентус М. Р.* Язык математики: Учебно-методическое пособие. — М.: Диалог-МГУ, 1999. — 28 с.
- [21] *Скорняков Л. А.* Элементы алгебры. 2-е изд. — М.: Наука, 1986. — 240 с.
- [22] *Шрейдер Ю. А.* Равенство, сходство, порядок. — М.: Наука, 1971. — 256 с.

Оглавление

1	Множества, отображения, факторизация	1
1.1	*Ложная посылка	1
1.2	*Математическая индукция	1
1.3	Множества и операции над ними	1
1.4	Отображения и их свойства	1
1.5	*Мощность множества	1
1.6	Бинарные отношения	1
1.7	Отношение эквивалентности	1
2	Простейшие алгебраические структуры	2
2.1	Алгебраические структуры (алгебраические системы)	2
2.2	Полугруппы и моноиды	2
2.3	Свободные полугруппы и моноиды	2
3	Группы	2
3.1	Группы	2
3.2	Группа движений	3
3.3	Группа симметрий правильного многоугольника (группа диэдра)	3
3.4	Возможность деления слева и справа в группе	3
3.5	Степень и порядок элемента группы	3
3.6	Группа преобразований множества	3
3.7	Разложение подстановок в произведение независимых циклов	4
3.8	Разложение подстановок в произведение транспозиций	4
3.9	Чётные и нечётные подстановки	4
3.10	Знакопеременная группа (группа чётных подстановок)	4
3.11	Изоморфизм групп	4
3.12	Вложение группы в группу преобразований	5
3.13	Циклические группы	5
3.14	*Прямое произведение групп	5
3.15	Смежные классы по подгруппе	5
3.16	Нормальная подгруппа	5
3.17	Гомоморфизм групп	5
3.18	Факторгруппа	6
3.19	Теорема о гомоморфизме	6
3.20	*Свободные группы	6
4	Кольца и поля	6
4.1	Кольца	6
4.2	*Делители нуля	8
4.3	Поля	8
4.4	Поле комплексных чисел	9
4.5	Кольца многочленов	9
4.6	Кольцо вычетов	9
4.7	Поле вычетов по простому модулю	9
4.8	*Малая теорема Ферма	9
5	*Другие алгебраические структуры	9
5.1	*Полукольца	9
5.2	*Решётки	9

6	Элементы линейной алгебры	10
6.1	Векторное пространство (арифметическое линейное пространство)	10
6.2	Линейная зависимость векторов	10
6.3	Базис и размерность векторного пространства	10
6.4	Линейные преобразования	10
6.5	Матрицы, действия над ними	10
6.6	Формула для вычисления элементов обратной матрицы	10
6.7	Ранг матрицы	10
6.8	Приведение матрицы к ступенчатому виду	10
6.9	Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований	10
6.10	Определители квадратных матриц	10
6.11	Вычисление определителей	10
6.12	Системы линейных уравнений	10
6.13	Метод Гаусса решения систем	11
6.14	Метод Крамера решения систем	11
6.15	Теорема Кронекера—Капелли	11
6.16	Теорема об общем решении однородной и неоднородной систем	11