Программа экзамена на 1-м курсе по дисциплине “Введение в математическую логику”

(лектор — М. Р. Пентус)

Логика высказываний

Формулы логики высказываний. Соглашения о скобках. Подформулы в логике высказываний. Истинностное значение формулы при данной оценке пропозициональных переменных. Таблица истинности формулы. Тавтологии, выполнимые формулы, тождественно ложные формулы, их взаимосвязь. Эквивалентность (равносильность) формул логики высказываний. Законы логики высказываний в форме равносильностей. Теорема о подстановке в логике высказываний (без доказательства). Теорема об эквивалентной замене в логике высказываний. Логическое следование в логике высказываний.

Приведение формул логики высказываний к нормальным формам (ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ). Выражение одних логических операций через другие. Штрих Шеффера, стрелка Пирса. Полные системы булевых функций.

Логика предикатов

Язык первого порядка: сигнатура, алфавит, термы, атомарные формулы, формулы, подформулы. Примеры: язык теории множеств, язык теории групп. Свободные и связанные вхождения индивидных переменных. Свободные индивидные переменные формулы. Замкнутые термы. Замкнутые формулы. Подстановка терма вместо переменной. Интерпретация сигнатуры. Истинность замкнутой формулы в данной интерпретации. Предикаты, выразимые в данной интерпретации.

Общезначимые и выполнимые формулы языка первого порядка, их взаимосвязь. Примеры общезначимых формул. Равносильность формул языка первого порядка. Законы логики первого порядка в форме равносильностей. Теорема о подстановке в тавтологии (без доказательства). Теорема об эквивалентной замене в логике первого порядка. Переименование связанных переменных. Корректные подстановки. Теорема о корректной подстановке в общезначимую формулу (без доказательства), существенность условия корректности в этой теореме.

Предварённые формулы. Приведение формул к предварённой форме.

Модель множества замкнутых формул. Логическое следование в логике первого порядка. Теория первого порядка, её аксиомы и теоремы. Понятие совместной теории. Пример совместной теории, пример несовместной теории. Элементарная эквивалентность интерпретаций. Элементарная теория данной интерпретации. Теории первого порядка с равенством. Примеры: теория групп, теория частично упорядоченных множеств, теория линейно упорядоченных множеств. Нормальные модели. Сигнатура формальной арифметики, её стандартная интерпретация. Аксиомы формальной арифметики.

Исчисление высказываний

Аксиомы и правила классического исчисления высказываний. Выводимые формулы. Вывод из гипотез. Вывод формулы $A \to A$ в классическом исчислении высказываний. Теорема о корректности классического исчисления высказываний. Теорема о дедукции для классического исчисления высказываний. Свойства выводимости из гипотез. Теорема о полноте классического исчисления высказываний. Противоречивое множество формул логики высказываний.

Исчисление предикатов

Аксиомы и правила классического исчисления предикатов. Выводимые формулы. Вывод из замкнутых гипотез. Общезначимость аксиом классического исчисления предикатов. Теорема о корректности классического исчисления предикатов. Обобщённая теорема о корректности классического исчисления предикатов. Теорема о дедукции для классического исчисления предикатов.

Теорема Гёделя о полноте классического исчисления предикатов (без доказательства). Теорема компактности для логики предикатов. Локальная теорема Мальцева. Теорема о существовании нормальной модели совместной теории первого порядка. Неразличимость конечного и бесконечного.

Теория алгоритмов и арифметика

Основные понятия теории алгоритмов. Область возможных исходных данных и область возможных значений алгоритма. Пошаговый характер выполнения алгоритма. Возможные варианты развития процесса применения алгоритма к исходным данным. Область применимости алгоритма. Частичная функция, вычисляемая данным алгоритмом. Машины Тьюринга. Вычисление словарных и числовых функций на машинах Тьюринга. Тезис Чёрча. Теорема о вычислимости по Тьюрингу композиции функций.

Разрешимые множества. Свойства объединения, пересечения и дополнения разрешимых множеств. Сигнализирующее множество алгоритма. Полухарактеристическая функция. Полуразрешимые множества. Вычислимые последовательности. Перечислимые множества. Канторовская нумерующая функция для пар натуральных чисел. Нумерация кортежей фиксированной длины. Нумерация словарного пространства. Проекция множества. Пять эквивалентных определений перечислимого множества. Теорема Чёрча–Поста (критерий разрешимости). Свойства объединения и пересечения перечислимых множеств. Перечислимость области определения и области значений вычислимой функции. Теорема о графике вычислимой функции.

Кодирование программ посредством слов в алфавите программ. Лямбда-обозначения. Существование универсальной машины Тьюринга. Универсальные функции. Построение вычислимой универсальной функции для класса всех вычислимых k-местных числовых функций. Пример вычислимой функции, не имеющей тотального вычислимого продолжения. Существование неразрешимого перечислимого множества. Проблема остановки, её алгоритмическая неразрешимость.

Главные универсальные функции. Главность вычислимой универсальной функции, построенной по нумерации машин Тьюринга. Задача распознавания свойств вычислимых функций по их программам. Теорема Райса.

Арифметические множества. Арифметические функции. Арифметичность объединения, пересечения, разности, прямого произведения и проекции арифметических множеств. Арифметичность вычислимых функций (без доказательства). Арифметичность перечислимых множеств. Неперечислимость множества арифметических истин. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики.

Приложения и обобщения

Понятие изоморфизма интерпретаций.

Элиминация кванторов в элементарной теории стандартного линейного порядка на множестве рациональных чисел. Элементарная эквивалентность всех плотных линейно упорядоченных множеств без первого и последнего элемента.

Понятие разрешимой теории. Разрешимость теории плотных линейно упорядоченных множеств без первого и последнего элемента. Задача распознавания истинности замкнутых арифметических формул, её алгоритмическая неразрешимость.

Логика второго порядка. Запись утверждения о бесконечности области возможных значений индивидных переменных с помощью функциональной переменной. Выразимость предиката равенства с помощью предикатной переменной (формула Лейбница). Невозможность распространения теоремы компактности на логику второго порядка. Арифметика второго порядка и единственность её модели с точностью до изоморфизма.